

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik III (Theorie C – Elektrodynamik) WS 12-13

Prof. Dr. Alexander Mirlin
Dr. Igor Gornyi

Musterlösung Blatt 5
Besprechung 14.11.2012

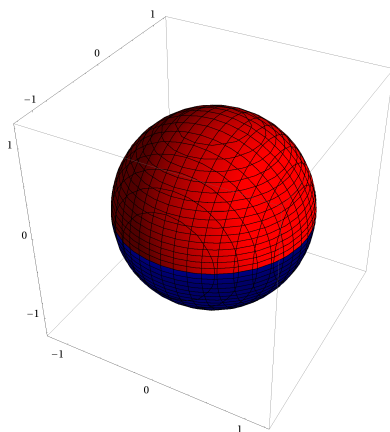
Aufgabe 1: Kugelflächenfunktionen

(10 Punkte)

Betrachten Sie eine Kugelschale mit Radius R , deren beide Hemisphären isoliert voneinander sind und auf unterschiedlichem Potential liegen (die Dicke der isolierenden Schicht zwischen den Hemisphären ist viel kleiner als der Radius, $\delta \ll R$):

$$\Phi_1 = +V \quad (0 \leq \theta < \pi/2) \quad (1)$$

$$\Phi_2 = -V \quad (\pi/2 < \theta \leq \pi) \quad (2)$$



Die Randbedingungen für das Potential Φ sind auf der linken Seite zu sehen (die Darstellung ist für $R = 1$): Der rote (hellere) Bereich liegt auf dem Potential $+V$, der blaue (dunklere) Bereich auf dem Potential $-V$. In Kugelkoordinaten kann man diese Randbedingung aber auch kompakt als

$$\Phi(R, \theta, \phi) = V \operatorname{sgn}(\cos \theta) \quad (3)$$

darstellen, wenn man unter $\operatorname{sgn}(x)$ die Vorzeichenfunktion versteht, d.h. $\operatorname{sgn}(x) = 1$ für $x > 0$ und $\operatorname{sgn}(x) = -1$ für $x < 0$.

Berechnen Sie das Potential im Aussen- und Innenraum jeweils als Entwicklung in Kugelflächenfunktionen bis zu $l = 5$.

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)}) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (4)$$

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (5)$$

mit den zugeordneten Legendre-Polynomen

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l. \quad (6)$$

Die Entwicklung in Kugelflächenfunktionen ähnelt der Entwicklung in einer Taylorreihe: man stellt eine gegebene Funktion dar durch eine Superposition von anderen, einfacheren Funktionen. Es besteht in beiden Fällen ein einfacher Zusammenhang zwischen der

Funktion und ihren Koeffizienten in der Entwicklung; in der Taylorentwicklung wäre dies $f(x) = \sum_n c_n x^n / n!$ sowie $c_n = \partial_x^n f(x)|_{x=0}$. Der zentrale Unterschied ist, dass die Taylorentwicklung für analytische Funktionen auf der reellen Achse (oder in der komplexen Ebene) gültig ist, während Kugelflächenfunktionen auf der Oberfläche der Einheitskugel definiert sind und damit automatisch die korrekte Periodizität auf der Kugel mitbringen.

Im Unterschied zu den Monomen x^n , die bei der Taylorentwicklung als Basisfunktionen dienen, bilden die Kugelflächenfunktionen sogar eine orthonormierte (orthogonale und auf 1 normierte) Basis eines abstrakten Vektorraumes.¹ Auf diesem kann man ein Skalarprodukt definieren, $\langle f, g \rangle = \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi f^*(\theta, \phi) g(\theta, \phi)$. Die Orthonormierung führt im Fall der Kugelflächenfunktionen zu der Identität

$$\langle Y_{lm}, Y_{l'm'} \rangle = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'}. \quad (7)$$

Die Entwicklung einer hinreichend gutartigen Funktion auf der Einheitskugel, $g(\theta, \phi)$ in Kugelflächenfunktionen folgt der Form $g(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^\infty \sum_{m=-l}^l C_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi)$. Die Koeffizienten lassen sich durch Projektion mit Hilfe der Orthonormalitätsrelation bestimmen:

$$\langle Y_{lm}, g \rangle = \left\langle Y_{lm}, \sum_{l'=0}^\infty \sum_{m'=-l'}^{l'} C_{l'm'} Y_{l'm'} \right\rangle = \sum_{l'=0}^\infty \sum_{m'=-l'}^{l'} C_{l'm'} \langle Y_{lm}, Y_{l'm'} \rangle \quad (8)$$

$$= \sum_{l'=0}^\infty \sum_{m'=-l'}^{l'} C_{l'm'} \delta_{l,l'} \delta_{m,m'} = C_{lm}. \quad (9)$$

Ausgeschrieben ergibt sich also die Formel für die Koeffizienten von $g(\theta, \phi)$:

$$C_{lm} = \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi Y_{lm}^*(\theta, \phi) g(\theta, \phi). \quad (10)$$

In Gleichung (4) kann man die Koeffizienten C_{lm} als $A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)}$ identifizieren. Wie genau sich diese Koeffizienten C_{lm} im Rahmen dieser Aufgabe auf die A_{lm} und B_{lm} verteilen, soll später diskutiert werden, wir berechnen in einem ersten Schritt die C_{lm} des gegebenen Potentials. Zu beachten ist, dass die C_{lm} zwar Konstanten bezüglich der Winkel θ und ϕ sind, aber nicht bezüglich des Radius r .

Um das Potential zu entwickeln, betrachten wir es bei der gegebenen Randbedingung $r = R$. Dort haben wir $\Phi(R, \theta, \phi) = V \text{sgn}(\cos \theta)$, die Koeffizienten sind also

$$C_{lm} = \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi Y_{lm}^*(\theta, \phi) V \text{sgn}(\cos \theta). \quad (11)$$

Betrachten Sie dazu zuerst die Symmetrie des Problems. Welche Vereinfachung der Gleichung (4) ergibt sich daraus?

Da das Problem rotationssymmetrisch um die z -Achse ist, tragen nur Kugelflächenfunktionen mit $m = 0$ bei, weil alle anderen Kugelflächenfunktionen eine Abhängigkeit vom Winkel ϕ haben. Diesen Sachverhalt erkennt man auch an Gleichung (11): Die einzige ϕ -Abhängigkeit des Integranden dort kommt aus der Kugelflächenfunktion, welche den

¹Die Monome x^n spannen zwar auch eine vollständige Basis eines Vektorraumes auf, diese Basis ist jedoch weder orthogonal noch normiert.

Term $e^{im\phi}$ enthält. Da $\int_0^{2\pi} e^{im\phi} = 0 \ \forall m \neq 0$, haben wir damit alle Koeffizienten mit $m \neq 0$ bereits berechnet. Bei $m = 0$ trägt dieses Integral mit einem Faktor von 2π bei. Es bleibt also das Integral

$$C_{l0} = \int_0^\pi d\theta \sin \theta N_l^0 P_l^0(\cos \theta) V \operatorname{sgn}(\cos \theta) 2\pi \quad (12)$$

zu berechnen, wobei N_l^m der Vorfaktor in Gleichung (5) ist. Durch die bekannte Substitution $x = \cos \theta$ (x sei hier nur eine Substitutionsvariable und *nicht* die Koordinate!), erhalten wir

$$C_{l0} = 2\pi V \int_{-1}^1 dx N_l^0 P_l^0(x) \operatorname{sgn}(x). \quad (13)$$

Wir teilen den Integralausdruck nun in die beiden Teilbereiche $(-1, 0)$ und $(0, 1)$ an. Da $\operatorname{sgn}(x) = -1$ für $x < 0$, können wir im Intervall für negative x die Substitution $x \rightarrow -x$ machen und dann beide Ausdrücke wieder addieren. Schließlich erhalten wir

$$C_{l0} = 2\pi V N_l^0 \int_0^1 dx [P_l^0(x) - P_l^0(-x)]. \quad (14)$$

Setzen wir nun die bekannte Form

$$P_l^0(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$$

ein, so erhalten wir

$$C_{l0} = 2\pi V N_l^0 \int_0^1 dx \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l [1 - (-1)^l], \quad (15)$$

wobei $1 - (-1)^l$ für alle *geraden* l verschwindet, somit bleiben uns also nur noch ungerade Koeffizienten. Da l ungerade sein muss, tritt der Term $l = 0$ nicht auf, jeder verbleibende Ausdruck enthält also mindestens eine x -Ableitung. Wir können daher den Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung ($f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx$) anwenden und das Integral trivial ausführen:

$$C_{l0} = 2\pi V N_l^0 \frac{1}{2^l l!} \left[\frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}} (x^2 - 1)^l \right]_0^1 = 2\pi V N_l^0 \frac{1}{2^l l!} X_l, \quad (16)$$

wo wir mit der letzten Gleichung den Ausdruck X_l definiert haben, der nun simpel genug auszuwerten ist.

Folgende Tabelle stellt nun die Ergebnisse für die einzelnen Koeffizienten zusammen:

l	N_l^0	$(2^l l!)^{-1}$	X_l	C_{l0}
1	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}}$	1	1	$V\sqrt{3\pi}$
3	$\sqrt{\frac{7}{4\pi}}$	1/24	-6	$-\frac{V\sqrt{7\pi}}{4}$
5	$\sqrt{\frac{11}{4\pi}}$	1/1920	240	$\frac{V\sqrt{11\pi}}{8}$

Dies sind alle Koeffizienten, die bis $l = 5$ auftreten, der Rest verschwindet. Erst ab $l = 7$ treten weitere Koeffizienten auf.

Überlegen Sie anschliessend für Innen- und Aussenraum getrennt, was die jeweiligen Randbedingungen für die Koeffizienten A_{lm} bzw. B_{lm} bedeuten.

Im **Innenraum** muss das Potential bei $r = 0$ wohldefiniert sein, d.h. Terme $r^{-(l+1)}$ dürfen nicht auftreten. Daher müssen die B_{lm} im Innenraum gleich 0 sein und die A_{lm} sind dann gegeben durch

$$A_{lm} = C_{lm}/R^l, \quad (17)$$

wenn man Φ am Rand bei $r = R$ auswertet und dann C_{lm} mit $A_{lm}r^l$ gleichsetzt.

Setzt man alle Koeffizienten C_{lm} ein, so erhält man für das Potential nahe dem Ursprung im Innenraum der Kugel den Ausdruck

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_l A_{l0} r^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l^0(\cos \theta) \quad (18)$$

$$\begin{aligned} &\simeq \frac{3}{2} V \frac{r}{R} \cos \theta - \frac{7}{16} V \frac{r^3}{R^3} \cos \theta (5 \cos^2 \theta - 3) \\ &\quad + \frac{11}{128} V \frac{r^5}{R^5} \cos \theta (63 \cos^4 \theta - 70 \cos^2 \theta + 15). \end{aligned} \quad (19)$$

Im **Außenraum** muss das Potential bei $r = \infty$ verschwinden, d.h. Terme r^l dürfen nicht auftreten, Daher müssen die A_{lm} im Außenraum 0 sein und für die B_{lm} erhält man

$$B_{lm} = C_{lm} R^{l+1}. \quad (20)$$

Die Entwicklung des Potentials ist damit für große Abstände gegeben durch

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_l B_{l0} r^{-(l+1)} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l^0(\cos \theta) \quad (21)$$

$$\begin{aligned} &\simeq \frac{3}{2} V \frac{R^2}{r^2} \cos \theta - \frac{7}{16} V \frac{R^4}{r^4} \cos \theta (5 \cos^2 \theta - 3) \\ &\quad + \frac{11}{128} V \frac{R^6}{r^6} \cos \theta (63 \cos^4 \theta - 70 \cos^2 \theta + 15). \end{aligned} \quad (22)$$

Aufgabe 2: Multipolentwicklung

(2+2+2+2+2+5=15 Punkte)

Berechnen Sie das Potential in grosser Entfernung $r \gg a$ als Multiploentwicklung (bis zu max. Quadrupoltermen) der folgenden Punktladungsverteilungen:

Im kartesischen Koordinatensystem sind die Multipolmomente für eine Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ wie folgt definiert:

$$\text{Monopol} \quad q_m = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r} \rho(\vec{r})$$

$$\text{Dipol} \quad \vec{d} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r} \vec{r} \rho(\vec{r})$$

$$\text{Quadrupol} \quad Q = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r} (3\vec{r}\vec{r}^T - \vec{r}^2 \mathbf{1}) \rho(\vec{r})$$

Für eine diskrete Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha})$ ergeben sich folgende Formen:

$$\begin{aligned} \text{Monopol} \quad q_m &= \sum_{\alpha} q_{\alpha} \\ \text{Dipol} \quad \vec{d} &= \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} q_{\alpha} \\ \text{Quadrupol} \quad Q &= \sum_{\alpha} (3\vec{r}_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}^T - r_{\alpha}^2 \mathbf{1}) q_{\alpha} \end{aligned}$$

Hier ist zu beachten, dass der Index α die Ladung identifiziert und **nicht** die Raumrichtung!

Für die Näherung des Potentials im Fernfeld gilt der Ausdruck

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_m}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{d}}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{\vec{r}^T Q \vec{r}}{r^5} + \dots \right), \quad (23)$$

wobei $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ gilt.

(a) *Ladung $-q$ im Ursprung, $3q$ bei $(0, 0, a)$*

Das Monopolmoment ist $q_m = -q + 3q = 2q$. Das Dipolmoment ergibt sich als $\vec{d} = -q \cdot 0 + 3q(0, 0, a)^T = 3qa\hat{e}_z$. Das Quadrupolmoment ist

$$Q = -q(0 - 0) + 3q \left(3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} (0, 0, a) - a^2 \mathbf{1} \right) = 3qa^2 \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Somit ist das Potential im Fernfeld gegeben durch

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2q}{r} + \frac{3qaz}{r^3} + \frac{3qa^2}{2r^5} (2z^2 - x^2 - y^2) + \dots \right). \quad (25)$$

(b) *Ladung $3q$ im Ursprung, $-q$ bei $(0, 0, -a)$*

Das Monopolmoment ist $q_m = 3q - q = 2q$. Das Dipolmoment ergibt sich als $\vec{d} = 3q \cdot 0 - q(0, 0, -a)^T = qa\hat{e}_z$. Das Quadrupolmoment ist

$$Q = 3q(0 - 0) - q \left(3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} (0, 0, -a) - a^2 \mathbf{1} \right) = -qa^2 \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Somit ist das Potential im Fernfeld gegeben durch

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2q}{r} + \frac{qaz}{r^3} + \frac{qa^2}{2r^5} (x^2 + y^2 - 2z^2) + \dots \right). \quad (27)$$

(c) *Ladung $-q$ im Ursprung, $3q$ bei $(a, 0, 0)$*

Das Monopolmoment ist $q_m = -q + 3q = 2q$. Das Dipolmoment ergibt sich als $\vec{d} = -q \cdot 0 + 3q(a, 0, 0)^T = 3qa\hat{e}_x$. Das Quadrupolmoment ist

$$Q = -q(0 - 0) + 3q \left(3 \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (a, 0, 0) - a^2 \mathbf{1} \right) = 3qa^2 \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Somit ist das Potential im Fernfeld gegeben durch

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2q}{r} + \frac{3qax}{r^3} + \frac{3qa^2}{2r^5}(2x^2 - y^2 - z^2) + \dots \right). \quad (29)$$

- (d) *Ladung $-2q$ im Ursprung, q bei $(a, 0, 0)$, q bei $(0, 0, -a)$*

Das Monopolmoment ist $q_m = -2q + q + q = 0$. Das Dipolmoment ergibt sich als $\vec{d} = -2q \cdot 0 + q(a, 0, 0)^T + q(0, 0, -a)^T = qa(\hat{e}_x - \hat{e}_z)$. Das Quadrupolmoment ist

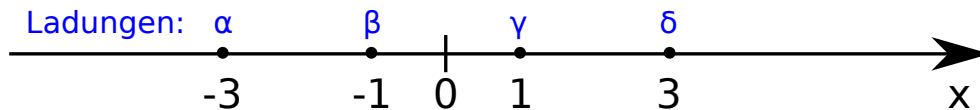
$$\begin{aligned} Q &= -2q(0 - 0) + q \left(3 \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (a, 0, 0) - a^2 \mathbf{1} \right) \\ &\quad + q \left(3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} (0, 0, -a) - a^2 \mathbf{1} \right) = qa^2 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (30)$$

Somit ist das Potential im Fernfeld gegeben durch

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{qa(x - z)}{r^3} + \frac{qa^2}{2r^5}(x^2 - 2y^2 + z^2) + \dots \right). \quad (31)$$

- (e) *Finden Sie eine Konfiguration von Punktladungen auf einer Linie, so dass die Multipolentwicklung des Potentials mit dem Oktupolterm beginnt.*

Da man mit 3 Ladungen auf einer Linie immer ein endliches Quadrupolmoment erhält, wenn Monopol- und Dipolmomente verschwinden, nehmen wir den Ansatz, dass wir vier Ladungen α , β , γ und δ haben, die in gleichen Abständen nebeneinander auf einer Linie liegen, wobei wir das Koordinatensystem zentriert haben:



Das geforderte Verschwinden des Monopolmoments stellt uns die Bedingung, dass die Summe aller Ladungen verschwinden muss, d.h.

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0. \quad (32)$$

Das Dipolmoment dieser Konfiguration ist $\vec{d}/a = -3\alpha - \beta + \gamma + 3\delta$. Wenn dies verschwinden soll, so erhalten wir

$$3(\delta - \alpha) + (\gamma - \beta) = 0. \quad (33)$$

Schließlich müssen wir noch das Quadrupolmoment berechnen. Die Nichtdiagonalelemente sind trivialerweise 0, da alle Ladungen auf einer der Koordinatenachsen liegen und daher im Tensorprodukt $\vec{r}\vec{r}^T$ keine Nichtdiagonalelemente auftreten. Für die xx -Komponente erhalten wir

$$Q_{xx}/a^2 = \alpha(3 \cdot 9 - 9) + \beta(3 - 1) + \gamma(3 - 1) + \delta(3 \cdot 9 - 9). \quad (34)$$

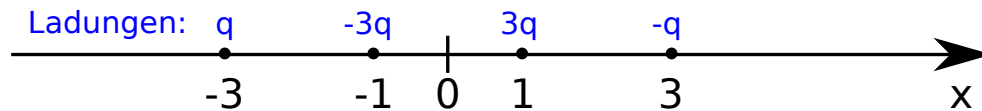
was uns, wenn wir fordern, dass dies verschwindet, auf die Gleichung

$$9(\alpha + \delta) + (\beta + \gamma) = 0 \quad (35)$$

führt. Für die yy - und zz -Komponenten erhalten wir

$$Q_{yy}/a^2 = Q_{zz}/a^2 = \alpha(-9) + \beta(-1) + \gamma(-1) + \delta(-9), \quad (36)$$

was uns ebenfalls auf Gleichung (35) führt. Aus Gleichung (32) folgern wir, dass $\beta + \gamma = -(\alpha + \delta)$ ist und setzen dies in Gleichung (35) ein, womit wir $8(\alpha + \delta) = 0$ erhalten, und somit folgerichtig $\delta = -\alpha$ und $\gamma = -\beta$. Beides in Gleichung (33) eingesetzt führt auf $\beta = -3\alpha$. Setzen wir $\alpha = q$, so erhalten wir die Lösung $\alpha = q$, $\beta = -3q$, $\gamma = 3q$ und $\delta = -q$:



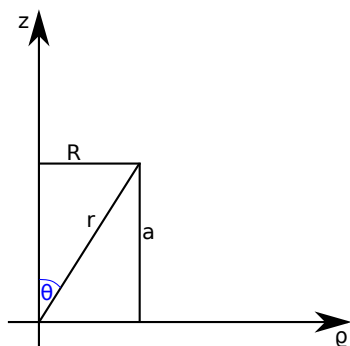
Bei dieser Konfiguration ist der erste auftretende Term im Fernfeld das Oktupolmoment.

- (f) *Zwei Kreisringe [Radius R und Mittelpunkt $(0, 0, a)$ bzw. $(0, 0, -a)$] sind homogen mit der Ladung q_1 bzw. q_2 geladen und liegen in den Ebenen $z = a$ bzw. $z = -a$. Berechnen Sie das Potential als Multipolentwicklung in Kugelkoordinaten bis einschliesslich dem Quadrupolterm im Bereich $r_0 \gg \sqrt{R^2 + a^2}$. Welche Terme verschwinden für $q_1 = q_2$, bzw. $q_1 = -q_2$?*

Als erstes seien die Anmerkungen gemacht, dass das Monopol- und Dipolmoment sich sofort durch einfache Überlegungen bestimmen lassen. Im Kartesischen gilt, dass das Monopolmoment einfach die Summe aller Ladungen ist, d.h. $q_m = q_1 + q_2$. Das Dipolmoment kann aus Symmetriegründen nur in z -Richtung zeigen und muss daher $\vec{d} = a(q_1 - q_2)\hat{e}_z$ sein. Damit wären die sphärischen Mono- und Dipolmomente:

$$q_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}(q_1 + q_2), \quad q_{1,\pm 1} = 0, \quad q_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}a(q_1 - q_2).$$

Dennoch werden wir diese im folgenden explizit ausrechnen, zumal das Quadrupolmoment nicht derart trivial zu erhalten ist.



Zuerst müssen wir die Ladungsdichte der Ringe in Kugelkoordinaten parametrisieren. In der Skizze links ist ein Schnitt entlang der xz -Ebene zu sehen. Wenn der Ring den Radius R hat und den Abstand a von der xy -Ebene, dann liegt er damit direkt auf einer Kugel mit Radius $r = \sqrt{a^2 + R^2}$. Der Winkel θ in Kugelkoordinaten ist durch

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}}$$

gegeben. Da der Ring homogen ist, besteht keinerlei ϕ -Abhängigkeit.

Somit muss die Ladungsdichte eines Ringes die funktionale Abhängigkeit

$$\rho(\vec{r}) = C\delta(r - \sqrt{R^2 + a^2})\delta(\cos \theta - \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}})$$

besitzen. Da die Gesamtladung des Ringes q_1 ergeben soll, können wir die Konstante durch Integration bestimmen:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r} \rho_1(\vec{r}) &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^\infty dr r^2 C \delta(r - \sqrt{R^2 + a^2}) \delta(\cos \theta - \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}}) \\ &= C \cdot 2\pi \cdot 1 \cdot (R^2 + a^2) \equiv q_1 \\ \Rightarrow C &= \frac{q_1}{2\pi(R^2 + a^2)}\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Gesamtladungsdichte, wenn man den zweiten Ring bei $z = -a$ noch mit einbezieht,

$$\begin{aligned}\rho(\vec{r}) &= \frac{1}{2\pi(R^2 + a^2)} \delta(r - \sqrt{R^2 + a^2}) \left[q_1 \delta(\cos \theta - \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}}) \right. \\ &\quad \left. + q_2 \delta(\cos \theta + \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}}) \right].\end{aligned}\quad (37)$$

Im folgenden ist eine Liste mit den Kugelflächenfunktionen bis zu $l = 2$, die wir für die Integrale benötigen werden:

l	m	$Y_{lm}(\theta, \phi)$
0	0	$\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$
1	0	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$
1	1	$-\sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{i\phi} \sin \theta$
2	0	$\sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1)$
2	1	$-\sqrt{\frac{15}{8\pi}} e^{i\phi} \sin \theta \cos \theta$
2	2	$\sqrt{\frac{15}{32\pi}} e^{2i\phi} \sin^2 \theta$

Auch hier fallen in der Entwicklung alle $m \neq 0$ -Terme weg, weil das Problem rotationssymmetrisch um die z -Achse ist (siehe Aufgabe 1). Damit bleiben hier nur die drei Momente q_{00} , q_{10} und q_{20} übrig bis $l = 2$.

Das Monopolmoment ist gegeben durch

$$q_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r} \rho(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} (q_1 + q_2), \quad (38)$$

was wir auch erwartet hatten durch Überlegungen am Anfang der Aufgabe.

Beim Dipolmoment ist eine kurze Rechnung nötig,

$$q_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r} \rho(\vec{r}) z = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r} \rho(\vec{r}) r \cos \theta. \quad (39)$$

Die ϕ -Integration dieses Integrals gibt trivial 2π , welche die 2π im Nenner der Konstanten von ρ wegheben. Die r -Integration ist gegeben durch

$$\int_0^\infty dr r^3 \delta(r - \sqrt{R^2 + a^2}) \frac{1}{R^2 + a^2} = \sqrt{R^2 + a^2}. \quad (40)$$

Bei der θ -Integration nutzen wir wieder die bekannte Substitution $x = \cos \theta$, so dass

$$\begin{aligned}
& \int_0^\pi d\theta \sin \theta \left[q_1 \delta(\cos \theta - a/\sqrt{R^2 + a^2}) + q_2 \delta(\cos \theta + a/\sqrt{R^2 + a^2}) \right] \cos \theta \\
&= \int_{-1}^1 dx \left[q_1 \delta(x - a/\sqrt{R^2 + a^2}) + q_2 \delta(x + a/\sqrt{R^2 + a^2}) \right] x \\
&= \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} (q_1 - q_2).
\end{aligned} \tag{41}$$

Setzt man nun alle Teile und Vorfaktoren korrekt zusammen, so erhält man das Endergebnis für das Dipolmoment,

$$q_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} a (q_1 - q_2), \tag{42}$$

so wie bereits erwartet wurde.

Beim Quadrupolmoment ist das Integral

$$q_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r} (3z^2 - r^2) \rho(\vec{r}) \tag{43}$$

auszurechnen. Setzen wir nun $z = r \cos \theta$, so wird nun im r -Integral analog zum Dipolmoment statt eines r^3 -Beitrages ein r^4 -Beitrag auftreten, durch die δ -Distribution wird im Zähler also ein Term $(R^2 + a^2)^2$ auftreten, der sich teilweise mit dem bestehenden Nenner weghebt. Vom $\cos^2 \theta$ -Term wird die θ -Integration analog wie oben ausgeführt, nur, dass im substituierten Integral nun ein x^2 statt eines x steht, d.h. $\frac{a^2}{R^2 + a^2}$ nach Auswerten der δ -Distributionen stehen bleibt.

Fasst man nun alles zusammen, so erhält man als Quadrupolmoment

$$q_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (q_1 + q_2) [2a^2 - R^2]. \tag{44}$$

Zusammengefasst haben wir also die folgenden Multipolmomente (alle restlichen bis $l = 2$ verschwinden):

$$\begin{aligned}
q_{00} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} (q_1 + q_2) \\
q_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} a (q_1 - q_2) \\
q_{20} &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (q_1 + q_2) [2a^2 - R^2]
\end{aligned}$$

Bei $q_1 = q_2$ verschwindet das Dipolmoment, bei $q_1 = -q_2$ verschwinden die Monopol- und Quadrupolmomente. Dass das Quadrupolmoment hier verschwindet liegt allerdings an der Wahl des Koordinatensystems, nur das Monopolmoment verschwindet immer in jedem Koordinatensystem für $q_1 = -q_2$.

Die Entwicklung des Potentials für allgemeine q_1, q_2 im Fernfeld ergibt also den

Ausdruck

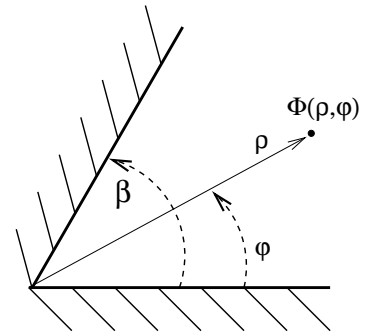
$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{r}) &= \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{q_{lm}}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \phi) \\
&= \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \frac{q_{l0}}{r^{l+1}} Y_{l0}(\theta, \phi) \\
&\approx \frac{1}{\epsilon_0} \left[\frac{q_{00}}{r} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} + \frac{q_{10}}{3r^2} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta + \frac{q_{20}}{5r^3} \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1) \right] \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1 + q_2}{r} + \frac{a(q_1 - q_2)}{r^2} \cos \theta + \frac{(2a^2 - R^2)(q_1 + q_2)}{4r^3} (3 \cos^2 \theta - 1) \right] \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1 + q_2}{r} + \frac{(q_1 - q_2)a}{r^3} z + \frac{(q_1 + q_2)(2a^2 - R^2)}{4r^5} (3z^2 - r^2) \right]. \quad (45)
\end{aligned}$$

Bonusaufgabe: **Zylinderkoordinaten**

(2+3=5 Bonuspunkte)

Wenn sich für ein Problem Zylinderkoordinaten anbieten, es aber in der z -Komponente konstant ist, vereinfacht sich das Problem, insbesondere benötigt man nicht die Bessel-Funktion. Betrachtet werden soll eine Ecke aus zwei leitenden, unendlich ausgedehnten, geerdeten Ebenen. Gesucht werden alle Funktionen, die die Laplace-Gleichung und zugleich die entsprechenden Randbedingungen erfüllen.

(a) Separieren Sie mittels des Ansatzes $\Phi = R(\rho)Q(\varphi)Z_0$ die Laplace-Gleichung.



Wir setzen $\Phi(\rho, \varphi, z) = R(\rho)Q(\varphi)Z_0$ in die Definition des Laplaceoperators ein. Da Φ nicht von z abhängt, fällt der Term mit der z -Ableitung sofort weg. Wir suchen nun nach Lösungen der Laplacegleichung $\Delta\Phi = 0$,

$$\frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho \partial_\rho R(\rho) Q(\varphi) Z_0) + \frac{1}{\rho^2} \partial_\varphi^2 R(\rho) Q(\varphi) Z_0 = 0. \quad (46)$$

Wir multiplizieren die Gleichung mit ρ^2 und teilen sie durch Φ . Da $Q(\varphi)Z_0$ nicht von ρ abhängt, kann man es als Konstante vor die ρ -Ableitung ziehen, das gleiche gilt für $R(\rho)Z_0$ und die φ -Ableitung. Wir erhalten nun

$$\frac{\rho}{R(\rho)} \partial_\rho (\rho \partial_\rho R(\rho)) + \frac{1}{Q(\varphi)} \partial_\varphi^2 Q(\varphi) = 0. \quad (47)$$

Da der erste Term nur von ρ (aber nicht von φ) und der zweite Term nur von φ (aber nicht von ρ) abhängt, müssen beide Terme konstant sein. Es folgt daher, dass

$$\frac{\rho}{R(\rho)} \partial_\rho (\rho \partial_\rho R(\rho)) = c \quad (48)$$

$$\frac{1}{Q(\varphi)} \partial_\varphi^2 Q(\varphi) = -c, \quad (49)$$

womit wir die partielle Differentialgleichung in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen separiert haben.

- (b) *Zeigen Sie, dass die Randbedingung eines verschwindenden Potentials auf den Oberflächen die allgemeine Lösung reduziert auf:*

$$\Phi(\rho, \varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \rho^{m\pi/\beta} \sin\left(\frac{m\pi}{\beta} \varphi\right)$$

Wir fahren nun damit fort, das Gleichungssystem (48,49) zu lösen. Wir fangen mit der einfacheren Gleichung (49) an, die wir mit $Q(\varphi)$ durchmultiplizieren und alles auf eine Seite bringen:

$$\partial_{\varphi}^2 Q(\varphi) + cQ(\varphi) = 0. \quad (50)$$

Wenn wir davon ausgehen, dass $c > 0$, dann sind die Lösungen der Gleichung

$$Q(\varphi) = A \cos(\omega\varphi) + B \sin(\omega\varphi), \quad \omega^2 = c. \quad (51)$$

Da wir annehmen, dass beide Leiterplatten geerdet sind, muss $Q(\varphi = 0) = 0$ und $Q(\varphi = \beta) = 0$ gelten, somit erhalten wir die Bedingung, dass $A = 0$ ($\cos(0) = 1$) und $\omega = m\pi/\beta$ (wegen $\sin(x) = 0 \forall x = m\pi$), wobei $m \in \mathbb{N}$. (Da $\sin(-x) = -\sin(x)$ und der Vorfaktor B beliebig ist, müssen wir nicht ganz $\mathbb{Z}$ betrachten hier.) Die Konstante B absorbieren wir in die globale Konstante des Gesamtpotentials Φ und lassen sie daher von nun an weg.

Die Lösung für $c < 0$ tritt **nicht** auf, da die Lösung daraufhin eine Kombination aus hyperbolischen Funktionen ($\sinh(x)$, $\cosh(x)$) gewesen wäre, die aber in jeder Kombination maximal eine Nullstelle besitzten, weswegen die Lösung auf Grund des physikalischen Problems nicht erlaubt ist.

Ebenfalls irrelevant ist der Fall $c = 0$, da die Gleichung sonst auf $\partial_{\varphi}^2 Q(\varphi) = 0$ reduzieren würde. Diese hat $Q(\varphi) = A\varphi + B$ als allgemeine Lösung, welche aber außer für $A = B = 0$ nie $Q(0) = Q(\beta) = 0$ erfüllen kann. Somit ist diese Lösung durch die Randbedingungen ebenfalls nicht erlaubt.

Setzen wir nun die gegebene Konstante in Gleichung (48) ein und multiplizieren mit $R(\rho)$ durch, so erhalten wir

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) - cR(\rho) = 0. \quad (52)$$

Da dies eine skaleninvariante Gleichung ist ($\rho \rightarrow l \cdot \rho$ würde nichts an dem Verhältnis der Koeffizienten der Terme zueinander ändern), wählen wir ein Potenzgesetz, $R(\rho) = \rho^{\lambda}$ als Lösungsansatz. Eingesetzt ergibt dies

$$\rho^2 \lambda(\lambda - 1) \rho^{\lambda-2} + \rho \lambda \rho^{\lambda-1} - c \rho^{\lambda} = 0. \quad (53)$$

Dividieren wir diese Gleichung durch ρ^{λ} , so ergibt sich

$$\lambda^2 - \lambda + \lambda - c = 0, \quad (54)$$

folglich also

$$\lambda = \pm \sqrt{c} = \pm \frac{m\pi}{\beta}. \quad (55)$$

Da $R(\rho)$ für $\rho = 0$ (in der Ecke) wohldefiniert und gleich 0 sein sollte, legt dies uns das Vorzeichen für λ fest. Damit ist

$$R(\rho) = \rho^{m\pi/\beta}. \quad (56)$$

Somit haben wir die Lösung des Gleichungssystems unter den gegebenen Randbedingungen bestimmt, und diese ist gegeben durch

$$\Phi = Z_0 \rho^{m\pi/\beta} \sin(m\pi\varphi/\beta). \quad (57)$$

Da m aber beliebig aus $\mathbb{N}$ ist, kann die allgemeinste Lösung unter der gegebenen Randbedingung auch eine beliebige Linearkombination mit verschiedenen m sein. Daher ist die allgemeine Lösung des Problems gegeben durch

$$\Phi(\rho, \varphi, z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \rho^{m\pi/\beta} \sin(m\pi\varphi/\beta). \quad (58)$$