

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik III
(Theorie C – Elektrodynamik) WS 12-13**Prof. Dr. Alexander Mirlin**
Dr. Igor Gornyi**Musterlösung: Blatt 6**
Besprechung 21.11.2012

Aufgabe 1: Ampère-Gesetz

(2+2+2=6 Punkte)

Zwei lange, schlanke Spulen mit Radien $a < b$ sind wie in Skizze auf der x -Achse angeordnet. Sie werden jeweils in entgegengesetzte Richtungen vom Strom I durchflossen. Die innere Spule hat Windungszahl n_1 pro Einheitslänge, die äußere Spule Windungszahl n_2 pro Einheitslänge.

Berechnen Sie das Magnetfeld für die Bereiche:

- (a) Innerhalb der inneren Spule

Für die Lösung der Aufgabe benutzen wir das Ampère'sche Gesetz

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \quad (1)$$

jedoch in der Integralform

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int d\vec{A} \vec{j}. \quad (2)$$

Um das Magnetfeld im Inneren der beiden Spulen zu berechnen, legen wir ein Rechteck auf die $y-z$ Ebene, dessen zwei Seiten parallel zur x -Achse verlaufen. Eine dieser Seiten liegt innerhalb der inneren Spule, die andere Seite außerhalb der äußeren Spule (siehe Skizze a).

Für lange schlanke Spulen ist das Magnetfeld im Inneren der Spule homogen und parallel zur x -Achse ausgerichtet, sofern man weit genug von deren Ende entfernt ist. Das Feld außerhalb der Spule muss null sein, damit das Magnetfeld im Unendlichen verschwindet.

Somit ergibt sich aus Gl. (2) für ein Rechteck mit der Seitenlänge h

$$(B_i - \underbrace{B_{\text{außen}}}_{=0})h = \mu_0 I h (n_1 - n_2). \quad (3)$$
$$B_i = \mu_0 I (n_1 - n_2).$$

- (b) Zwischen den beiden Spulen

Um das Magnetfeld im Zwischenraum zu berechnen, integrieren wir Gleichung (2) über die Fläche b aus der Querschnittsfäche. Da das Magnetfeld der inneren Spule

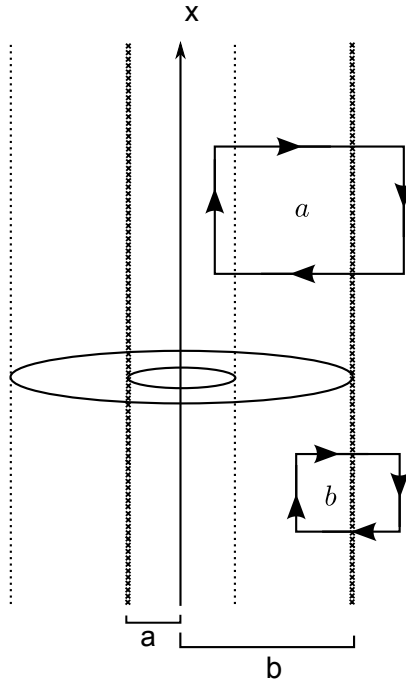


Abbildung 1: Schematische Skizze der Querschnittsfläche durch die beiden Spulen. Der Strom durch die Spulen fließt in unterschiedliche Richtungen und zeigt senkrecht auf die Bildebene (Punkte zeigen aus der Ebene hinaus, Kreuze zeigen in die Ebene hinein).

hier keinen Einfluss mehr hat (siehe Begründung aus Teilaufgabe a) ergibt sich

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int d\vec{A} \vec{j}$$

$$B_z = -I\mu_0 n_2. \quad (4)$$

(c) Ausserhalb beider Spulen

$$B_{\text{außen}} = 0. \quad (5)$$

Aufgabe 2: Leiterschleifen

(2+2+1+1+2+2=10 Punkte)

(a) Ein dünner Leiter, in dem der Strom I fließt, bildet eine kreisrunde Schlaufe [Radius R , Mittelpunkt $(0,0,0)$] in der xy -Ebene.

(a1) Berechnen Sie das magnetische Feld B entlang der z -Achse (d. h. für $x = y = 0$).

Hierzu benutzen wir das Biot-Savart-Gesetz

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}') d^3 r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (6)$$

wobei über die geschlossene Leiterschleife integriert wird. Die Stromdichte ist gegen durch $\vec{j} = \hat{e}_\varphi I$. Die anderen Vektoren sind gegeben durch $\vec{r} = (0, 0, z)^T$

und $\vec{r}' = R(\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0)^T$. Mit $\hat{e}_\varphi = (-\sin(\varphi), \cos(\varphi), 0)^T$ ergibt sich das Magnetfeld zu

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} R \frac{d\varphi}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} \cos(\varphi)z \\ \sin(\varphi)z \\ R \end{pmatrix} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{e}_z.\end{aligned}\quad (7)$$

Die Integrale über die trigonometrischen Funktionen verschwinden.

(a2) Berechnen Sie das magnetische Dipolmoment der Leiterschleife.

Das magnetische Dipolmoment ist proportional zur umschlossenen Fläche des Leiters. Somit ergibt sich

$$\vec{m} = I\pi R^2 \hat{e}_z. \quad (8)$$

(a3) Berechnen Sie das magnetische Dipolfeld auf der z -Achse und vergleichen Sie mit dem exakten Ergebnis aus (a1).

Um das Dipolfeld zu berechnen, müssen wir erst die Dipolnäherung des Vektorpotentials bestimmen. Sie ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\vec{A}^{(1)}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{r}}{|\vec{r}|^2} \\ &= \frac{\mu_0 I \rho R^2}{4(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \hat{e}_\varphi,\end{aligned}\quad (9)$$

wobei $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\hat{r} = \vec{r}/r$. Das Dipolfeld ist gegeben durch

$$\vec{B} \approx \vec{\nabla} \times \vec{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3\hat{r}(\hat{r} \cdot \vec{m}) - \vec{m}}{|\vec{r}|^3} \right]. \quad (10)$$

Entlang der z -Achse berechnet es sich zu

$$B_z = \frac{\mu_0 I R^2}{2|z|^3} \quad (11)$$

Im Fernfeld für $z \gg R$ geht das exakte Magnetfeld in das Dipolfeld über.

(b) Das Dipolmoment kann durch die vom Leiter umschlossene Fläche ausgedrückt werden. Gilt dies auch für nicht kreisförmige Leiterschleifen?

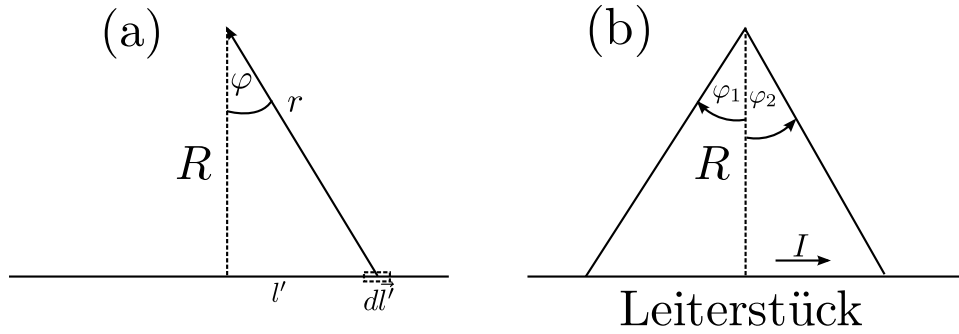
Ja. Das Dipolmoment ist für flache Leiterschleifen immer proportional zur umschlossenen Fläche der Leiterschleife.

(c) Ein dünner Leiter bildet ein Quadrat mit der Kantenlänge $2a$, das in der xy -Ebene liegt. Berechnen Sie das magnetische Feld B entlang der z -Achse, wenn in dem Leiter der Strom I fließt.

Um das Magnetfeld zu berechnen, verwenden wir das Biot-Savart Gesetz

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l}' \times \hat{r}}{r^2}. \quad (12)$$

Hier ist $\hat{r} = \vec{r}/r$ der normierte Einheitsvektor in r -Richtung. Wir betrachten zuerst das Magnetfeld eines dünnen Leiters (siehe Skizze). Die Grösse $d\vec{l}' \times \hat{r}$ zeigt senkrecht



aus der Bildebene hinaus ist proportional zu $d\vec{l} \cos(\varphi)$. Des Weiteren erhalten wir aus der Skizze die Beziehungen

$$\begin{aligned} l' &= R \tan(\varphi) \\ dl' &= \frac{R}{\cos^2(\varphi)} d\varphi, \end{aligned} \quad (13)$$

bzw.

$$R = r \cos(\varphi) \rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2(\varphi)}{R^2}. \quad (14)$$

Somit lässt sich das Magnetfeld für einen Abschnitt eines Leiterstückes, durch das der Strom I fließt, berechnen zu

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\cos^2(\varphi)}{R^2} \frac{R}{\cos^2(\varphi)} \cos(\varphi) d\varphi \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\sin(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)). \end{aligned} \quad (15)$$

Wir wollen das Magnetfeld entlang der z -Achse bestimmen für ein Quadrat der Kantenlänge $2a$, welches in der xy -Ebene liegt. Aus Symmetriegründen zeigt das Magnetfeld auf der z -Achse immer entlang der z -Achse und wir können das Ergebnis aus Gleichung (15) verwenden. Unter der Berücksichtigung, dass es sich um 4 Leiter handelt, ergibt sich für das Magnetfeld im Ursprung (mit $\varphi_1 = -\pi/4, \varphi_2 = \pi/4$)

$$B_z^{\text{ges}}(0) = \frac{\mu_0 I}{\pi a} \sqrt{2}. \quad (16)$$

Im Folgenden wird wieder das Magnetfeld entlang der z -Achse für ein Leiterstück betrachtet. Hierzu müssen wir die Winkel φ_1 und φ_2 parametrisieren. Es gilt

$$\varphi_i = \pm \arctan\left(\frac{a}{R}\right) = \pm \arctan\left(\frac{a}{\sqrt{z^2 + a^2}}\right) \quad (17)$$

Des Weiteren müssen wir noch den Betrag des Magnetfeldes in z -Richtung bestimmen, da die restlichen Komponenten des Magnetfeldes sich später mit den Beiträgen des gegenüberliegenden Drahtes aufheben (siehe Skizze). Es ergibt sich bei einem Leiterstück für das errechnete Magnetfeld und den Betrag in z -Richtung das Verhältnis von

$$\frac{B_z}{B} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + z^2}}. \quad (18)$$

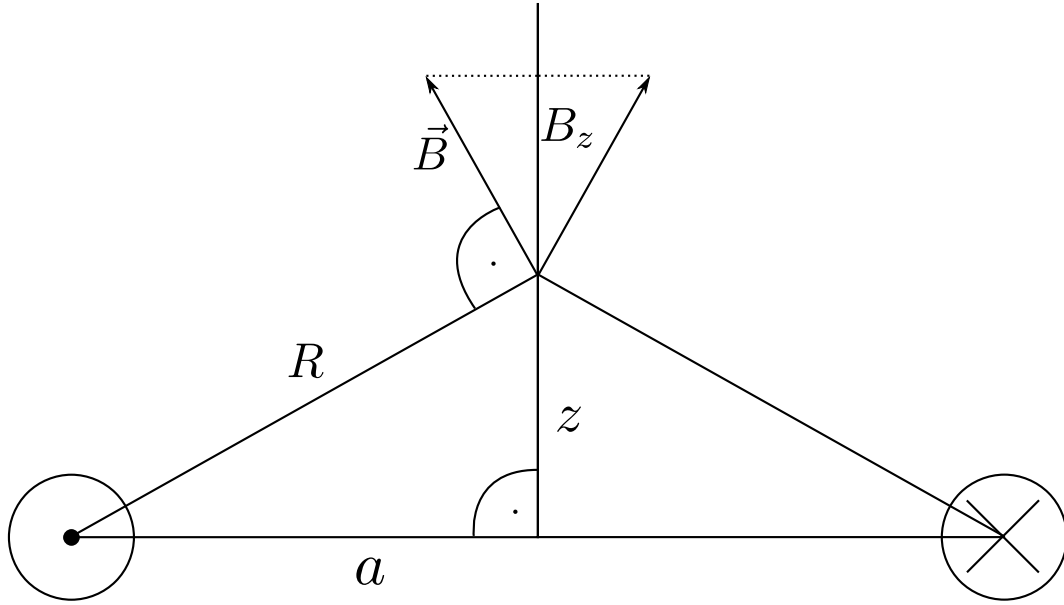


Abbildung 2: Veranschaulichung zur Symmetrie der Magnetfelder bzw. zur Bestimmung der B_z Komponente.

Dies liefert uns für den Betrag des Magnetfeldes in z -Richtung für ein Leiterstück

$$\begin{aligned} B_z &= \frac{\mu_0 I}{4\pi\sqrt{z^2 + a^2}} \frac{a}{\sqrt{a^2 + z^2}} (\sin(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)) \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi(z^2 + a^2)} \frac{2a^2}{\sqrt{2a^2 + z^2}}. \end{aligned} \quad (19)$$

Hierin wurde $\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ verwendet. Es müssen abschließend noch die Beiträge für alle vier Leiterstücke berücksichtigt werden und wir erhalten

$$B_z^{\text{ges}} = \frac{\mu_0 I}{\pi(z^2 + a^2)} \frac{2a^2}{\sqrt{2a^2 + z^2}}. \quad (20)$$

- (d) Betrachten Sie eine geschlossene, von einem konstanten Strom I durchflossene Leiterschleife. Berechnen Sie explizit die Gesamtkraft $\vec{F}$ die das von der Leiterschleife erzeugte Magnetfeld $\vec{B}$ auf die Leiterschleife selbst ausübt.

Wir benutzen das Biot-Savart-Gesetz, um das B -Feld der Leiterschleife zu bestimmen

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \frac{\vec{j}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}. \quad (21)$$

Ausgehend von der Definition des Kraftelements

$$d\vec{f} = d\vec{j}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x}), \quad (22)$$

sowie des B -Feldes nach Biot-Savart (Gleichung (21)) erhalten wir die gesamte Kraft, die die Stromverteilung $\vec{j}$ auf die Leiterschleife selbst ausübt durch Integration über die gesamte Schleife:

$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV \int dV' \frac{\vec{j}(\vec{x}) \times (\vec{j}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}'))}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

Da die Stromdichte $\vec{j}$ nur auf der Leiterschleife C ungleich null ist und dort überall konstant, können wir das Volumenintegral jeweils durch ein geschlossenes Linienintegral über die Leiterschleife ersetzen

$$\int dV \vec{j}(\vec{x}) \rightarrow I \oint_C d\vec{l}$$

wir erhalten dann

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{I^2 \mu_0}{4\pi} \oint_C \oint_C \frac{d\vec{l} \times (d\vec{l}' \times (\vec{x} - \vec{x}'))}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \\ &= \frac{I^2 \mu_0}{4\pi} \oint_C \oint_C \left\{ \underbrace{\frac{(d\vec{l} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')) d\vec{l}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}}_{(1)} - \underbrace{\frac{(d\vec{l} \cdot d\vec{l}') (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}}_{(2)} \right\} \end{aligned}$$

Es wurde die Vektoridentität $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$ benutzt.

Wir betrachten die beiden Teile des Integrals getrennt.

Der zweite Term ist antisymmetrisch unter Umbenennung der Integrationsvariablen $x \leftrightarrow x'$. Er ist damit gleich seinem eigenen negativen, und damit null.

$$\begin{aligned} \oint \oint (d\vec{l} \cdot d\vec{l}') \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} &\stackrel{x \leftrightarrow x'}{=} \oint \oint (d\vec{l}' \cdot d\vec{l}) \frac{\vec{x}' - \vec{x}}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \\ &= - \oint \oint (d\vec{l} \cdot d\vec{l}') \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = 0 \end{aligned}$$

Der erste Term kann geschrieben werden als

$$\oint d\vec{l}' \oint d\vec{l} \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = - \oint d\vec{l}' \oint d\vec{l} \cdot \vec{\nabla}_x \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = 0$$

da die Integration des Gradienten einer beliebigen skalaren Funktion über eine geschlossene Kurve immer null ergibt (Stokes'scher Satz, konservative Felder).

Wenn die Ersetzung des Volumenintegrals durch das Kurvenintegral nicht vorgenommen wurde, haben wir das folgende Integral:

$$\int dV \int dV' \vec{j}(\vec{x}') \vec{j}(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Hier kann die Vektoridentität $\vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{a}) = \vec{a} \cdot \vec{\nabla} \phi + \phi \vec{\nabla} \cdot \vec{a}$ für beliebige Vektorfelder $\vec{a}$ und Skalarfelder ϕ sowie die Quellenfreiheit von $\vec{j}$, $\int dV \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ verwendet werden, um das Ergebnis zu zeigen.

Aufgabe 3: Rotierende Kreisscheibe

(2+2=4 Punkte)

Betrachten Sie eine homogen geladene, rotierende Kreisscheibe mit Radius R , Gesamtladung Q und Winkelgeschwindigkeit ω (s. Abbildung).

- (a) Berechnen Sie das magnetische Dipolmoment und das magnetische Dipolfeld der Kreisscheibe.

In dieser Aufgabe empfiehlt es sich, Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) zu verwenden. Die Ladungsdichte $\hat{\rho}$, die das Problem beschreibt, ist gegeben durch

$$\hat{\rho}(\vec{r}) = \underbrace{\frac{Q}{\pi R^2}}_{=\sigma} \delta(z) \Theta(R - \rho). \quad (23)$$

Das Dipolmoment berechnet sich über

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int d^3 \vec{r} \hat{\rho}(\vec{r}) \vec{r} \times \vec{v}, \quad (24)$$

wobei

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (25)$$

Hierin ist $\vec{\omega} = \omega \hat{e}_z$ die Winkelgeschwindigkeit und $\vec{r} = \rho \hat{e}_\rho$ der Vektor, der auf die Ladungsverteilung zeigt. Wir setzen dies in Gleichung (24) ein und erhalten

$$\begin{aligned} \vec{m} &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty d\rho \rho \int_{-\infty}^\infty dz \sigma \delta(z) \Theta(R - \rho) (\rho \hat{e}_\rho \times \omega \hat{e}_z \times \rho \hat{e}_\rho) \\ &= \frac{1}{2} \sigma 2\pi \omega \int_0^\infty d\rho \rho^3 \Theta(R - \rho) \hat{e}_z \\ &= \frac{\sigma R^4 \omega \pi}{4} \hat{e}_z = \frac{Q R^2 \omega}{4} \hat{e}_z. \end{aligned} \quad (26)$$

Im Folgenden soll das Dipolfeld berechnet werden. Hierfür bestimmen wir die Dipolnäherung des Vektorpotentials

$$\begin{aligned} \vec{A}^{(1)}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{r}}{|\vec{r}|^2} \\ &= \frac{\mu_0 \sigma R^4 \omega \rho}{16(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \hat{e}_\varphi, \end{aligned} \quad (27)$$

Über das Vektorpotential $\vec{A}^{(1)}(\vec{r})$ lässt sich das Dipolfeld berechnen. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \vec{B}^{(1)}(\vec{r}) &= \vec{\nabla} \times \vec{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3\hat{r}(\hat{r} \cdot \vec{m}) - \vec{m}}{|\vec{r}|^3} \right] \\ &= \frac{\mu_0 \sigma R^4 \omega}{16} \left(\frac{3z\rho}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}} \hat{e}_\rho + \frac{2z^2 - \rho^2}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}} \hat{e}_z \right). \end{aligned} \quad (28)$$

Für das Dipolfeld entlang der z -Achse ($\rho = 0$) erhält man

$$\vec{B}^{(1)}(z) = \frac{\mu_0 \sigma R^4 \omega}{8|z|^3} \hat{e}_z. \quad (29)$$

- (b) Berechnen Sie exakt das magnetische Feld B auf der z -Achse.
Hierzu wird das Biot-Savart Gesetz verwendet

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (z\hat{e}_z - \hat{e}_\rho \rho')}{|z\hat{e}_z - \hat{e}_\rho \rho'|^3} \quad (30)$$

Alle zugehörigen Größen sind bekannt. Durch Einsetzen erhalten wir

$$\begin{aligned} \vec{B}(z) &= \frac{\sigma\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_0^{\infty} d\rho' \rho' \frac{\delta(z')\theta(R-\rho')\omega\rho'}{(z^2 + \rho'^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} \cos(\varphi)z \\ \sin(\varphi)z \\ \rho' \end{pmatrix} \\ &= \frac{\sigma\mu_0\omega}{2} \int_0^{\infty} d\rho' \frac{\theta(R-\rho')\rho'^3}{(z^2 + \rho'^2)^{3/2}} \hat{e}_z \\ &= \frac{\sigma\mu_0\omega}{2} \frac{(\sqrt{R^2 + z^2} - |z|)^2}{\sqrt{R^2 + z^2}} \hat{e}_z \\ &= \frac{\sigma\mu_0\omega}{2} \left(\frac{2z^2}{\sqrt{R^2 + z^2}} + \frac{R^2}{\sqrt{R^2 + z^2}} - 2|z| \right) \hat{e}_z. \end{aligned} \quad (31)$$

Für große Abstände, $z \gg R$, ergibt sich

$$\vec{B}(z) \approx \frac{\sigma\mu_0\omega}{8} \frac{R^4}{|z|^3} \hat{e}_z, \quad (32)$$

was in Übereinstimmung mit dem Dipolfeld entlang der z -Achse ist.