

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik III (Theorie C – Elektrodynamik) WS 12-13

Prof. Dr. Alexander Mirlin
Dr. Igor Gornyi

Musterlösung: Blatt 7
Besprechung 28.11.2012

Aufgabe 1: **Drehmoment auf Stromverteilung**

Betrachten Sie eine konstante Stromverteilung $\vec{j}(\vec{r})$ in einem homogenen konstanten externen magnetischen Feld $\vec{B}$. Zeigen Sie, dass für das Drehmoment $\vec{N}$ auf die Stromverteilung gilt

$$\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (1)$$

mit dem magnetischen Moment $\vec{m}$ der Stromverteilung.

Das magnetische Moment $\vec{m}$ der Stromverteilung ist gegeben durch

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \int dV \, \vec{x} \times \vec{j}(\vec{x}). \quad (2)$$

Wir gehen dabei von der allgemeinen Definition des Drehmoments aus

$$d\vec{N} = \vec{x} \times d\vec{F}. \quad (3)$$

Einsetzen des Kraftelements $d\vec{F}$ und Integration liefert

$$\vec{N} = \frac{1}{c} \int dV \, \vec{x} \times [\vec{j}(\vec{x}) \times \vec{B}]. \quad (4)$$

Zur Darstellung der Kreuzprodukte kann der total antisymmetrische Levi-Civita-Tensor ϵ_{ijk} verwendet werden. Es gilt:

$$c_i = (\vec{a} \times \vec{b})_i = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} a_j b_k. \quad (5)$$

Weiterhin gilt

$$\sum_{i=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}. \quad (6)$$

Wir benutzen, dass für die Komponenten der quellfreien Stromdichte $\vec{j}$ gilt

$$\int dV \, (x_i j_j + j_i x_j) = 0. \quad (7)$$

Es folgt (Achtung - Einsteinsche Summationskonvention!):

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{c} \int dV \, \epsilon_{ijk} x_j \epsilon_{klm} j_l B_m = \frac{1}{c} \int dV \, \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} x_j j_l B_m \\ &= \frac{1}{c} \int dV \, (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) x_j j_l B_m = \frac{1}{c} \int dV \, (x_m j_i B_m - x_l j_l B_i) \\ &= \frac{1}{c} \int dV \, x_m j_i B_m. \end{aligned} \quad (8)$$

Dabei wurde die Eigenschaft des Levi-Civita-Tensors benutzt, sowie die Eigenschaft, dass der Levi-Civita-Tensor unter zyklischer Vertauschung der Indizes unverändert bleibt;

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{ikj} = \dots \quad (9)$$

In der letzten Zeile von Gl. (8) wurde ausserdem die Integralidentität (7) ausgenutzt:

$$\int dV x_i j_i = - \int dV j_i x_i \Rightarrow \int dV x_i j_i = 0. \quad (10)$$

Es soll gezeigt werden, dass obige Gleichung identisch ist zu $\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B}$. Wir schreiben dies ebenfalls in Komponenten:

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{2c} \int dV \varepsilon_{ijl} (\vec{x} \times \vec{j})_j B_l = \frac{1}{2c} \int dV \varepsilon_{ijl} \varepsilon_{jkm} x_k j_m B_l \\ &= \frac{1}{2c} \int dV (\delta_{lk} \delta_{im} - \delta_{lm} \delta_{ik}) x_k j_m B_l = \frac{1}{2c} \int dV (x_l j_i B_l - x_i j_l B_l) \\ &= \frac{1}{c} \int dV x_l j_i B_l. \end{aligned}$$

□ qed

In der letzten Zeile wurde wieder die Integralidentität (7) verwendet:

$$\int dV x_i j_j = - \int dV x_j j_i \Rightarrow \int dV (x_i j_j - x_j j_i) = 2 \int dV x_i j_j$$

Aufgabe 2: Leiterschleife im Magnetfeld

Eine quadratische Leiterschleife mit Kantenlänge a , Leiterquerschnitt $A \ll a^2$ und Masse m befindet sich in einem Magnetfeld $\vec{B}$. Das Magnetfeld zeigt in y -Richtung, parallel zur Flächennormalen der Leiterschleife. Es füllt den gesamten Halbraum $z > 0$ aus, wo es konstant und homogen ist. Zur Zeit $t = 0$ befindet sich die untere Kante der Leiterschleife auf der x -Achse bei $z = 0$, und die Schleife beginnt in Richtung $-\vec{e}_z$ unter dem Einfluss der Gravitation zu fallen.

- (a) Finden Sie die Geschwindigkeit $v(t)$ der Leiterschleife während ihres Falls durch das Magnetfeld als Funktion von t . *Hinweis:* Der durch die elektromotorische Kraft $\mathcal{E}$ in einem Leiter mit Widerstand R induzierte Strom I ist gegeben durch $I = \mathcal{E}/R$.

Die Bewegungsgleichung des vorliegenden Problems lautet

$$m \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{F}_g - \vec{F}_l(t)$$

mit der Gravitationskraft $\vec{F}_g = mg$ in Richtung $-\vec{e}_z$ und der Lorentzkraft $\vec{F}_l$ welche auf die Leiterschleife der Masse m wirkt. Da sich für $t > 0$ das untere Ende der Leiterschleife nicht mehr im Magnetfeld $\vec{B} = (0, B_0, 0)^T$ befindet, gilt

$$\vec{F}_l = I \vec{l} \times \vec{B}$$

mit der Parametrisierung $\vec{l} = (a, 0, 0)^T$.

Für die Elektromotorische Kraft $\mathcal{E}$ die in der Leiterschleife, welche die Fläche S mit der normalen $\vec{n}$ umschließt, den Strom I induziert, gilt

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} \, da.$$

Man beachte, das von der bewegten Leiterschleife aus gesehen $\vec{B} = \vec{B}(\vec{x}, t)$ gilt. Daher muss die totale Ableitung $\frac{d}{dt}$ durch die konvektive Ableitung ersetzt werden:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla.$$

Setzt man $\vec{B}$ ein folgt wegen der Divergenzfreiheit und des Stokes'schen Satzes

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} \, da - \oint_c [\vec{B} \times \vec{v}(t)] \cdot d\vec{l}$$

Da das Magnetfeld selbst jedoch für einen bestimmten Aufenthaltsort $\vec{x} = \vec{x}(t)$ der Leiterschleife konstant ist, verschwindet das erste Integral. Für das zweite Integral erhält man

$$-\oint_c [\vec{B} \times \vec{v}(t)] \cdot d\vec{l} = -B_0 \vec{v}_z(t) a.$$

Mit $I = \mathcal{E}/R$ (R = Widerstand der Leiterschleife) und der Substitution

$$K = \frac{B_0^2 a^2}{Rm}$$

folgt dann für die Bewegungsgleichung

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} + K\vec{v}(t) = -\vec{e}_z g.$$

Da $\vec{B} \parallel \vec{n}$, $\vec{v} \parallel \vec{e}_z$ und sich die Lorentzkräfte auf die Seiten der Leiterschleife parallel zu $\vec{v}$ aufheben, findet die Bewegung der Leiterschleife nur in $\vec{e}_z$ Richtung statt. Daher reicht es, nur die z-Komponente der Bewegungsgleichung zu betrachten. Die homogene Gleichung hat dann die Lösung

$$v_z^{hom}(t) = k \cdot e^{-Kt}$$

und eine Lösung der inhomogenen Gleichung ist

$$v_z^{inhom}(t) = -\frac{g}{K}.$$

Die Anfangsbedingung $\vec{v}(0) = 0$ liefert für die Konstante $k = \frac{g}{K}$ und somit

$$v_z(t) = -\frac{g}{K} (1 - e^{-Kt}).$$

- (b) Berechnen Sie die maximale Geschwindigkeit $v_{\max}$ der Leiterschleife während ihres Falls durch das Magnetfeld im Grenzfall $a \rightarrow \infty$. Geben Sie den Zahlenwert für $v_{\max}$ für eine Leiterschleife aus Aluminium (Massendichte $\rho_m = 2.70 \text{ g cm}^{-3}$, spezifischer Widerstand $\rho = 26.5 \times 10^{-9} \text{ } \Omega \text{ m}$) in einem Magnetfeld von 1T an.

Für eine gegebenen Massendichte ρ_m gilt $m = 4Aa\rho_m$ und für einen gegebenen spezifischen Widerstand ρ ist $R = 4a\rho/A$. Einsetzen liefert

$$v_z(t) = -\frac{16g\rho\rho_m}{B_0^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{B_0^2}{16\rho\rho_m}t\right) \right].$$

Die maximale Geschwindigkeit wird erreicht für $t \rightarrow \infty$, daher

$$v_{max} = \left| \lim_{t \rightarrow \infty} \vec{v}_z \right| = \frac{16g\rho\rho_m}{B_0^2}$$

und für die gegebenen Zahlenwerte (mit $T = \text{kg C}^{-1} \text{s}^{-1}$ und $\Omega = \text{m}^2 \text{kg C}^{-2} \text{s}^{-1}$)

$$v_{max} = \frac{16 \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times 26.5 \times 10^{-9} \Omega \text{ m} \times 2.7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3}{1T^2} \approx 1.12 \times 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Aufgabe 3: Induktivität

- (a) Berechnen Sie die Selbstinduktivität einer schlanken zylindrischen Spule mit Radius a , Länge $l \gg a$ und Windungszahl n .

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass der magnetische Fluss einer Anordnung von Leiterschleifen gegeben ist durch

$$\Phi_j = \sum_i M_{ji} I_i.$$

Die Elemente der Matrix M bezeichnen die Induktionskoeffizienten. Für $M_{ii} \equiv L_i$ spricht man von Selbstinduktivität.

Betrachtet man eine Spule als Anordnung von n identischen Leiterschleifen entlang einer Achse, so folgt ($I_i = I$)

$$\Phi_j = \sum_i M_{ji} I_i = I L_j$$

und daher für die Selbstinduktivität der Spule mit Windungszahl n

$$L = \frac{n\Phi}{I}$$

wobei hier jetzt L die Selbstinduktivität der gesamten Spule und nicht nur einer Schleife der Spule bezeichnet. Setzt man die Definition des magnetischen Flusses ein und verwendet das Ergebnis aus Aufgabe 1a.) von Blatt 6 für nur eine Spule erhält man

$$L = \mu_0 n^2 \pi \frac{a^2}{l}.$$

- (b) Eine kurze Spule mit Radius a und Windungszahl n_1 liege innerhalb einer langen, schlanken Spule mit Radius $b > a$ und Windungszahl n_2 . Durch die innere Spule fließe ein Strom I_1 . Berechnen Sie den Gesamtfluss durch die äußere Spule aufgrund des Magnetfelds der kurzen Spule.

Wir benutzen, dass für die Gegeninduktivität gilt:

$$M_{12} = M_{21}.$$

Dann berechnen wir den Gesamtfluss durch die *innere* Spule aufgrund des Magnetfelds

$$B_2 \simeq \mu_0 \frac{n_2}{l_2} I_2$$

der äußeren Spule mit dem Strom I_2 (für $I_1 = 0$):

$$\Phi_1 = n_1 \pi a^2 B_2 = n_1 \pi a^2 \mu_0 \frac{n_2}{l_2} I_2 = M_{12} I_2, \quad (11)$$

wobei l_2 die Länge der äußeren Spule ist ($l_2 \gg b$). Es folgt

$$M_{21} = M_{12} = \frac{\pi a^2}{l_2} \mu_0 n_1 n_2 \quad (12)$$

Damit ist der Gesamtfluss Φ_2 durch die äußere Spule:

$$\Phi_2 = M_{21} I_1 = \frac{\pi a^2}{l_2} \mu_0 n_1 n_2 I_1. \quad (13)$$

- (c) Berechnen Sie die Gegeninduktivität (Induktivitätskoeffizient M_{12}) zweier paralleler quadratischer Leiterschleifen mit Kantenlänge a . Eine der Leiterschleifen liege in der xy -Ebene bei $z = 0$, die andere bei $z = h$ (Mittelpunkte bei $x = y = 0$).

Die Gegeninduktion ist gegeben durch die Induktivitätskoeffizienten

$$M_{12} = M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S_1} \oint_{S_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

Wir erhalten für M_{12} ,

$$M_{12} = 4 \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-a/2}^{a/2} dx_1 \int_{-a/2}^{a/2} dx_2 \left\{ \frac{-1}{[a^2 + h^2 + (x_2 - x_1)^2]^{1/2}} + \frac{1}{[h^2 + (x_2 - x_1)^2]^{1/2}} \right\}.$$

Mit

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} &= \operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}), \\ \int dx \ln(x + \sqrt{c+x^2}) &= x \ln(x + \sqrt{c+x^2}) - \int \frac{x dx}{\sqrt{c+x^2}}, \\ \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) &= 2 \operatorname{artanh}(x) \end{aligned}$$

erhalten wir weiter

$$\begin{aligned} M_{12} &= \frac{2\mu_0}{\pi} \left\{ h - 2\sqrt{a^2 + h^2} + \sqrt{2a^2 + h^2} \right. \\ &\quad \left. + a \operatorname{arctanh} \left[\frac{a(\sqrt{2a^2 + h^2} - \sqrt{a^2 + h^2})}{\sqrt{(2a^2 + h^2)(a^2 + h^2)} - a^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Die Entwicklung für $h \gg a$ liefert:

$$M_{12} \simeq \frac{\mu_0 a^4}{2\pi h^3}. \quad (15)$$

- (d) Berechnen Sie daraus weiterhin die Kraft, die notwendig ist, um die beiden Leiterschleifen mit den Strömen I_1 und I_2 entlang der z -Achse voneinander zu entfernen.

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass für die Kraft mit der eine geschlossene Schleife 2 auf eine geschlossene Schleife 1 wirkt die folgende Beziehung gilt:

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_1 \oint_2 \frac{d\vec{l}_1 \times [d\vec{l}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)]}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}. \quad (16)$$

Weiter lässt sich der Integrand in eine Form bringen, die explizit dem dritten Newton'schen Axiom genügt ($\vec{x}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$)

$$\frac{d\vec{l}_1 \times [d\vec{l}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)]}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} = d\vec{l}_2 \left[\frac{d\vec{l}_1 \cdot \vec{x}_{12}}{|\vec{x}_{12}|^3} \right] - (d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) \frac{\vec{x}_{12}}{|\vec{x}_{12}|^3} \quad (17)$$

Aus Symmetriegründen liefert der erste Term keinen Beitrag zum Integral über die geschlossene(n) Schleife(n). Somit folgt

$$\vec{F}_{12} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_1 \oint_2 (d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) \underbrace{\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}}_{-\vec{\nabla}_1 \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}} \quad (18)$$

Es gilt

$$F_{12} = |\vec{F}_{12}| = I_1 I_2 \left| \frac{\partial}{\partial h} M_{12}(h) \right|.$$

Mit Gl. (14) erhalten wir:

$$F_{12} = I_1 I_2 \frac{2\mu_0}{\pi} \left| 1 - \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} - \frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{h} + \frac{h\sqrt{2a^2 + h^2}}{a^2 + h^2} \right|.$$

Für $h \gg a$ gilt:

$$F_{12} \simeq \frac{3\mu_0 a^4}{2\pi h^4} I_1 I_2.$$

Die Kraft die extern aufgewendet werden muss, um die beiden Leiterschleifen auseinander zu bringen ist $\vec{F}_{\text{ext}} = -\vec{F}_{12}$.

Die Kraft zwischen den beiden Leiterschleifen kann auch aus der magnetischen Feldenergie abgeleitet werden. Wir nehmen an, dass die Schleife 2 im Ursprung verbleibt und wir die Schleife 1 entlang der z -Achse um die Strecke $d\vec{h} = dh \vec{e}_z$ verschieben. Die Ströme I_1 und I_2 bleiben konstant (s.a. Vorlesung). Bei der Verschiebung durch die Kraft $\vec{F}_{\text{ext}} = -\vec{F}_{12}$ muss zum einen die mechanische Arbeit $-\vec{F}_{12} \cdot d\vec{h}$ aufgewendet werden. Andererseits induziert die Änderung des magnetischen Flusses beim Verschieben der Leiterschleifen eine elektromotorische Kraft in beiden Leiterschleifen, was einer Energieänderung $2dW_{\text{emf}}$ zur Folge hat. Die gesamte Energieänderung ist

$$dW = dW_{\text{magn}} = -\vec{F}_{12} \cdot d\vec{h} - 2dW_{\text{emf}}. \quad (19)$$

Da $dW_{\text{emf}} = -\vec{F}_{12} \cdot d\vec{h}$ gilt (s. Vorlesung) folgt

$$-\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{F}_{12} = \frac{\partial W_{\text{magn}}}{\partial h} \vec{e}_z = \vec{\nabla} W_{\text{magn}}.$$

Aus der Vorlesung ist außerdem bekannt

$$W_{\text{magn}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} M_{ij} I_i I_j. \quad (20)$$

Man beachte, dass die Selbstenergien der Leiterschleifen nicht von h abhängen und konstant sind, da die Ströme konstant bleiben.