Karlsruher Institut für Technologie — Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik III (Theorie C – Elektrodynamik) WS 12-13

Prof. Dr. Alexander Mirlin
Dr. Igor Gornyi

Blatt 8
Besprechung 5.12.2012

Aufgabe 1: **Coulomb-Eichung** (2+2+2+4=10 Punkte)

In Coulomb-Eichung gilt

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0. \tag{1}$$

Die Stromdichte $\vec{j}$ kann als Summe eines parallelen Anteils $\vec{j}_\parallel$ und eines senkrechten Anteils $\vec{j}_\perp$ geschrieben werden. Es gilt

$$\begin{aligned} \vec{j}_\parallel(\vec{r}) &= -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\int d^3r' \, \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}, \quad (2) \\ \vec{j}_\perp(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\int d^3r' \, \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}. \quad (3) \end{aligned}$$

(a) Ausgehend von den Gleichungen (2) und (3), finden Sie

$$\vec{\nabla}\times\vec{j}_\parallel, \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{j}_\parallel, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{j}_\perp, \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{j}_\perp.$$

(b) Beweisen Sie die folgende Identitäten:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}\vec{\nabla}\frac{\partial\varphi}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c}\vec{j}_\parallel, \quad (4) \\ \nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c}\vec{j}_\perp. \quad (5) \end{aligned}$$

(c) Berechnen Sie die fouriertransformierte parallele und senkrechte Stromdichte $\vec{j}_\parallel(\vec{k})$ und $\vec{j}_\perp(\vec{k})$. Die Fouriertransformation ist dabei definiert als

$$\vec{j}(\vec{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\vec{j}(\vec{k})\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \tag{6}$$

Warum werden $\vec{j}_\parallel$ und $\vec{j}_\perp$ parallele bzw. senkrechte Stromdichte genannt?

(d) Zwei punktförmige Ladungsverteilungen befinden sich bei $\vec{r}_1 = (0,0,-a)$ und $\vec{r}_2 = (0,0,a)$. Entlang z-Achse zwischen den Ladungsverteilungen fließt ein konstanter Strom derart, dass die Ladung q_1 monoton mit der Zeit wächst und die Ladung q_2 im gleichen Maße mit der Zeit abnimmt:

$$q_1(t) = q_1(0) + It, \qquad q_2(t) = q_2(0) - It. \tag{7}$$

Berechnen Sie die parallele bzw. senkrechte Stromdichte.

Aufgabe 2: **Spannungstensor** (2 Punkte)

Die Kraft, die auf ein geladenes Objekt im elektromagnetischen Feld wirkt, kann mit Hilfe des Maxwellschen Spannungstensors T_{ij} berechnet werden.

Betrachten Sie nun zwei gleichnamige Punktladungen q und berechnen Sie die wirkenden Kräfte, indem Sie den Spannungstensor über jene Ebene integrieren, die im gleichen Abstand zwischen beiden Punktladungen liegt. Diskutieren Sie Richtung bzw. Vorzeichen der Kräfte.

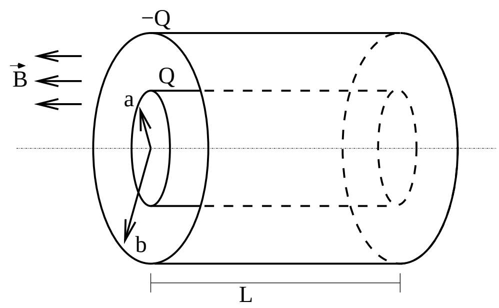
Aufgabe 3: **Drehimpuls einer Verteilung von Feldern** (2+2+4=8 Punkte)

Der Drehimpuls einer Verteilung von Feldern ist definiert als

$$\vec{L}_{\text{em}} = \int_V d^3r \quad [\vec{r} \times \vec{g}_{\text{em}}(t, \vec{r})] \ , \tag{8}$$

wobei $\vec{g}_{\text{em}}$ die Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes ist.

Betrachten Sie ein Teilstück der Länge L eines unendlich ausgedehnten Zylinderkondensators, auf dem die Ladungen $\pm Q$ sitzen. Der Kondensator befinde sich in einem homogenen magnetischen Feld $\vec{B}$ entlang der Zylinderachse (s. Skizze).



(a) Bestimmen Sie den Poynting-Vektor $\vec{S}$ im Inneren des Kondensators.

(b) Berechnen Sie den Drehimpuls des elektromagnetischen Feldes.

(c) Wir wollen nun die Drehimpulsbilanz betrachten, wenn das magnetische Feld abgeschaltet wird. Berechnen Sie dazu für eine Änderung des magnetischen Feldes $\partial\vec{B}/\partial t$ das Drehmoment, das vom induzierten elektrischen Feld auf die Ladungen $\pm Q$ ausgeübt wird und stellen Sie die Drehimpulsbilanz auf.