

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik III
(Theorie C – Elektrodynamik) WS 12-13**Prof. Dr. Alexander Mirlin**
Dr. Igor Gornyi**Blatt 9: Musterlösung**
Besprechung 12.12.2012**Aufgabe 1: Wellengleichung**

(3 Bonuspunkte)

Gegeben sei die eindimensionale Wellengleichung

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x, t) = \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2}\Psi(x, t). \quad (1)$$

Die Lösung wird erst durch die Anfangswerte

$$\frac{d\Psi(x, 0)}{dt} = \alpha(x) \quad \text{und} \quad \Psi(x, 0) = \beta(x) \quad (2)$$

bestimmt. Finden Sie $\Psi(x, t)$ für

$$\alpha(x) = \frac{A}{\cosh^2(x/a)} \quad \text{und} \quad \beta(x) = \frac{B}{\cosh^2(x/b)}. \quad (3)$$

Skizzieren Sie die Lösung für $t > 0$ und $A = 0$ bzw. $B = 0$.

Lösung: Wir wissen, dass

$$\Psi(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (4)$$

mit beliebigen Funktionen f und g die Wellengleichung (1) löst. Mit Gl. (4) haben wir:

$$\Psi(x, 0) = f(x) + g(x) = \beta(x), \quad (5)$$

$$\left. \frac{d\Psi(x, t)}{dt} \right|_{t=0} = -c \frac{df(x)}{dx} + c \frac{dg(x)}{dx} = \alpha(x). \quad (6)$$

Damit folgt:

$$f(x) - g(x) = -\frac{1}{c} \int_{-\infty}^x dx' \alpha(x'), \quad (7)$$

$$f(x) + g(x) = \beta(x), \quad (8)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\beta(x) - \frac{1}{2c} \int_{-\infty}^x dx' \alpha(x'), \quad (9)$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\beta(x) + \frac{1}{2c} \int_{-\infty}^x dx' \alpha(x'). \quad (10)$$

Es folgt, dass das gegebene Anfangswertproblem durch folgenden Ansatz gelöst wird:

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{2} [\beta(x + ct) + \beta(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} dx' \alpha(x'). \quad (11)$$

Mit

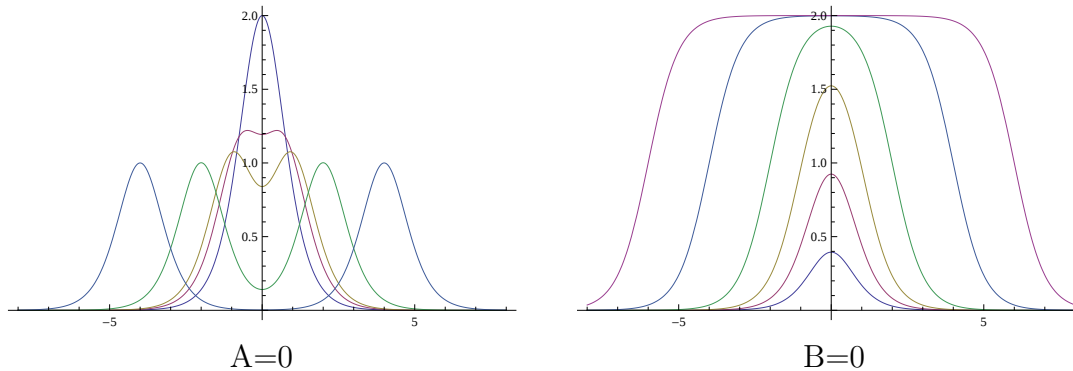
$$\alpha(x) = \frac{A}{\cosh^2(x/a)} \quad \text{und} \quad \beta(x) = \frac{B}{\cosh^2(x/b)}. \quad (12)$$

und

$$\int \frac{dx}{\cosh^2(x)} = \tanh(x) \quad (13)$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= \frac{B}{2} \left[\frac{1}{\cosh^2(x/b + ct/b)} + \frac{1}{\cosh^2(x/b - ct/b)} \right] \\ &+ \frac{A}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \frac{dx'}{\cosh^2(x'/a)} \\ &= \frac{B}{2} \left[\frac{1}{\cosh^2(x/b + ct/b)} + \frac{1}{\cosh^2(x/b - ct/b)} \right] \\ &+ \frac{Aa}{2c} [\tanh(x/a + ct/a) - \tanh(x/a - ct/a)]. \end{aligned} \quad (14)$$



Aufgabe 2: Kugelwelle

(3+2=5 Bonuspunkte)

Das elektrische Feld einer Kugelwelle sei gegeben durch:

$$\vec{E}(r, \vartheta, \varphi, t) = A \frac{\sin \vartheta}{r} \left[\cos(kr - \omega t) - \frac{1}{kr} \sin(kr - \omega t) \right] \hat{e}_\varphi, \quad \text{mit } \frac{\omega}{k} = c. \quad (15)$$

(a) Finden Sie $\vec{B}(r, \vartheta, \varphi, t)$, so dass die Maxwell-Gleichungen im Vakuum erfüllt sind.

Lösung: Aus Maxwell-Gleichungen folgt:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -c \vec{\nabla} \times \vec{E}. \quad (16)$$

Die Rotation des in Kugelkoordinaten gegebenen Vektorfeldes $\vec{E}$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} (E_\varphi \sin \vartheta) - \frac{\partial E_\vartheta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) \right) \vec{e}_\vartheta \\ &+ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r E_\vartheta) - \frac{\partial E_r}{\partial \vartheta} \right) \vec{e}_\varphi. \end{aligned} \quad (17)$$

Mit $\vec{E} \propto \vec{e}_\varphi$ (d.h. mit $E_r = E_\vartheta = 0$) erhalten wir

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} (E_\varphi \sin \vartheta) \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left(-\frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) \right) \vec{e}_\vartheta \quad (18)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2A \cos \vartheta}{r^2} \left[\cos(kr - \omega t) - \frac{1}{kr} \sin(kr - \omega t) \right] \vec{e}_r \\ &- \frac{A \sin \vartheta}{r} \left[-k \sin(kr - \omega t) + \frac{1}{kr^2} \sin(kr - \omega t) - \frac{1}{r} \cos(kr - \omega t) \right] \vec{e}_\vartheta. \end{aligned} \quad (19)$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} \vec{B}(r, \vartheta, \varphi, t) &= \frac{A}{kr^2} \left\{ 2 \cos \vartheta \left[\sin(kr - \omega t) + \frac{1}{kr} \cos(kr - \omega t) \right] \vec{e}_r \right. \\ &- \left. \sin \vartheta \left[kr \cos(kr - \omega t) - \frac{1}{kr} \cos(kr - \omega t) - \sin(kr - \omega t) \right] \vec{e}_\vartheta \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

- (b) Berechnen Sie den Poynting-Vektor $\vec{S}$ und daraus den Intensitätsvektor $\vec{I} = \langle \vec{S} \rangle$, indem Sie über eine Periode mitteln.

Lösung: Der Poynting-Vektor ist gegeben durch

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B}. \quad (21)$$

Mit Gl. (15) und Gl. (20) erhalten wir

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \frac{cA^2 \sin \vartheta}{4\pi kr^3} \left\{ 2 \cos \vartheta \left[\sin(kr - \omega t) \cos(kr - \omega t) \left(1 - \frac{1}{k^2 r^2} \right) \right. \right. \\ &+ \left. \frac{1}{kr} (\cos^2(kr - \omega t) - \sin^2(kr - \omega t)) \right] \vec{e}_\vartheta + kr \sin \vartheta \left[\cos^2(kr - \omega t) \left(1 - \frac{1}{k^2 r^2} \right) \right. \\ &- \left. \left. \frac{1}{kr} \sin(kr - \omega t) \cos(kr - \omega t) \left(2 - \frac{1}{k^2 r^2} \right) + \frac{1}{k^2 r^2} \sin^2(kr - \omega t) \right] \vec{e}_r \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Mit $\langle \sin(kr - \omega t) \cos(kr - \omega t) \rangle = 0$ und $\langle \sin^2(kr - \omega t) \rangle = \langle \cos^2(kr - \omega t) \rangle = 1/2$ ergibt sich der Intensitätsvektor $\vec{I} = \langle \vec{S} \rangle$ zu:

$$\begin{aligned} \vec{I} = \langle \vec{S} \rangle &= \frac{cA^2 \sin \vartheta}{4\pi kr^3} \left\{ kr \sin \vartheta \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{k^2 r^2} \right) + \frac{1}{2k^2 r^2} \right] \vec{e}_r \right\} \\ &= \frac{cA^2 \sin^2 \vartheta}{8\pi r^2} \vec{e}_r. \end{aligned} \quad (23)$$