Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik III (Theorie C – Elektrodynamik) WS 12-13

Prof. Dr. Alexander Mirlin
Dr. Igor Gornyi

Blatt 10
Besprechung 09.01.2013

Diese Musterlösung benutzt SI-Einheiten!

Aufgabe 1: **Koaxialkabel** (5+3+2=10 Punkte)

Ein Koaxialkabel bestehe aus einem langen Draht mit Radius a in einem langen Hohlzylinder mit Innenradius b ($b > a$). Draht und Zylinder seien konzentrisch zur z-Achse.

Das Koaxialkabel überträgt eine reine TEM-Welle:

$$\vec{E} = E_0 f_E(\rho) e^{i(kz-\omega t)} \vec{e}_\rho, \qquad \vec{B} = E_0 f_B(\rho) e^{i(kz-\omega t)} \vec{e}_\varphi, \tag{1}$$

wobei $\vec{e}_\rho$ und $\vec{e}_\varphi$ die Einheitsvektoren in Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) sind.

(a) Bestimmen Sie die Funktionen $f_E(\rho)$, $f_B(\rho)$ und den Poynting-Vektor für die TEM-Welle.

Lösung: Die elektro-magnetischen Wellen müssen den Maxwell-Gleichungen genügen. Dies werden wir im Folgenden überprüfen. Da im Raum zwischen den Zylindern keine Quellen vorhanden sind müssen die folgenden Gleichungen nachgerechnet werden:

(i)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

In Polarkoordinaten sind ∂_x und ∂_y gegeben durch:

$$\partial_x = \cos\phi \partial_\rho - \frac{\sin\phi}{\rho}\partial_\phi$$

$$\partial_y = \sin\phi \partial_\rho + \frac{\cos\phi}{\rho}\partial_\phi$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z \\
&= \left(\cos\phi \partial_\rho - \frac{\sin\phi}{\rho}\partial_\phi\right) \left(E_0 f_E e^{i(kz-\omega t)} \cos\phi\right) \\
&+ \left(\sin\phi \partial_\rho + \frac{\cos\phi}{\rho}\partial_\phi\right) \left(E_0 f_E e^{i(kz-\omega t)} \sin\phi\right) \\
&= \left(\partial_\rho + \frac{1}{\rho}\right) E_0 f_E(\rho) e^{i(kz-\omega t)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Somit haben wir gefunden:

$$\left(\partial_\rho + \frac{1}{\rho}\right) f_E(\rho) = 0 \Rightarrow f_E(\rho) = \frac{\text{Const.}}{\rho}$$

Die Konstante im letzten Term kann in E_0 in (1) absorbiert werden. Wir verwenden daher

$$f_E = \frac{1}{\rho}. \tag{2}$$

(ii) Eine analoge Rechnung für

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

zeigt, dass hieraus keine Einschränkungen auftreten:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= \partial_x B_x + \partial_y B_y + \partial_z B_z \\
&= \left(\cos\phi\partial_\rho - \frac{\sin\phi}{\rho}\partial_\phi\right)(-E_0 f_B e^{i(kz-\omega t)} \sin\phi) \\
&+ \left(\sin\phi\partial_\rho + \frac{\cos\phi}{\rho}\partial_\phi\right)(E_0 f_B e^{i(kz-\omega t)} \cos\phi) \\
&= 0
\end{aligned}$$

(iii) Aus der z-Komponente der Gleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2}\partial_t \vec{E}$$

findet man:

$$\begin{aligned}
(\vec{\nabla} \times \vec{B})_z &= \partial_x B_y - \partial_y B_x \\
&= \left(\cos\phi\partial_\rho - \frac{\sin\phi}{\rho}\partial_\phi\right)(-E_0 f_B e^{i(kz-\omega t)} \sin\phi) \\
&- \left(\sin\phi\partial_\rho - \frac{\cos\phi}{\rho}\partial_\phi\right)(E_0 f_B e^{i(kz-\omega t)} \cos\phi) \\
&= \left(\partial_\rho + \frac{1}{\rho}\right) E_0 f_B(\rho) e^{i(kz-\omega t)} \\
&= \frac{1}{c^2}\partial_t E_z \\
&= 0
\end{aligned}$$

Daher erhält man

$$f_B(\rho) = \frac{\text{Const.}}{\rho}.$$

Die x- und y-Komponenten der Gleichung legen die Konstante aus der oberen Gleichung auf $1/c$ fest, d.h.

$$f_B = \frac{1}{c\rho}. \tag{3}$$

(iv) Untersuchungen der vierten Maxwell-Gleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$$

zeigen, dass hieraus keine neuen Einschränkungen an f_E oder f_B auftreten. Es folgt, dass die z-Komponente der Rotation von $\vec{E}$ verschwindet

$$[\vec{\nabla} \times \vec{E}]_z = 0 \tag{4}$$

und damit kann die transversale Komponente des elektrischen Feldes als Gradient eines Potentials geschrieben werden:

$$\vec{E}_\perp = -\vec{\nabla}_\perp \Phi. \tag{5}$$

Die transversale Komponente des elektrischen Feldes $\vec{E}_\perp$ ist die Lösung des elektrostatischen Problems in zwei Dimensionen.

Der Poynting-Vektor dieser Wellenkonfiguration ist dann gegeben durch:

$$\begin{aligned}
\vec{S} &= \frac{1}{\mu_0}\mathrm{Re}\vec{E} \times \mathrm{Re}\vec{B} \\
&= \frac{1}{\mu_0 c \rho^2} E_0^2 \cos^2(kz - \omega t)\vec{e_\rho} \times \vec{e_\phi} \\
&= \frac{1}{\mu_0 c \rho^2} E_0^2 \cos^2(kz - \omega t)\vec{e_z}.
\end{aligned}$$

(b) Finden Sie die Längenladungsdichte des inneren Drahtes.
Lösung: Wir verwenden das Gaußsche Gesetz und das in der vorigen Aufgabe gefundene E-Feld um die Längenladungsdichte des inneren Drahtes zu bestimmen. Wir legen einen zylindrischen Streifen mit Einheitshöhe um das innere Kabel. Der Fluss des E-Feldes durch die Zylinderoberfläche ist dann gegeben durch:

$$\Phi = \frac{E_0}{\rho} \cdot 2\pi\rho e^{i(kz-\omega t)} = 2\pi E_0 e^{i(kz-\omega t)}$$

Daher ist die gesuchte Längenladungsdichte

$$\sigma = \epsilon_0 \mathrm{Re}\Phi = 2\pi\epsilon_0 E_0 \cos(kz - \omega t).$$

(c) Finden Sie den Strom im inneren Draht.

Lösung: Wir verwenden die Kontinuitätsgleichung:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \partial_t \sigma = 0$$

Da der Stromdichte-Vektor entlang der z-Achse liegt wird diese Gleichung zu

$$\partial_z J = -\partial_t \sigma = -2\pi\epsilon_0 \omega E_0 \sin(kz - \omega t) = -2\pi\epsilon_0 kc E_0 \sin(kz - \omega t)$$

Daher finden wir

$$J = 2\pi c \epsilon_0 E_0 \cos(kz - \omega t), \tag{6}$$

wobei wir angenommen haben, dass kein konstanter (mit Frequenz Null) Strom durch das Kabel fließt.

Aufgabe 2: **Abstrahlung einer Ladungsverteilung** (5+2+5+3=15 Punkte)

Gegeben sind zwei positive Ladungen q im Vakuum. Sie befinden sich auf der z-Achse bei

$$z_{1,2}(t) = \pm a\,[1 + \cos(\omega_0 t)].$$

Im Ursprung befindet sich zusätzlich die Ladung $-2q$.

(a) Bestimmen Sie das kleinste nichtverschwindende Multipolmoment der Ladungsverteilung.

Lösung: Das elektrische Dipol-Moment des Systems ist:

$$\vec{d} = \sum q_i \vec{r}_i = (qz_1 + qz_2)\mathbf{e_z} = 0.$$

Da die Positionen der Ladungen entlang der z-Achse oszillieren ist nur die z-Komponente des Stroms von Null verschieden. Daher ist das magnetische Dipolmoment gegeben durch:

$$\vec{m} = \int d\vec{I} \times \vec{r} = \int dI r \mathbf{e_z} \times \mathbf{e_z} = 0.$$

Das elektrische Quadrupole-Moment des Systems ist gegeben durch

$$Q_{\alpha\beta} = \sum_i 3r_{i\alpha}r_{i\beta} - r_i^2\delta_{\alpha\beta},$$

wobei der Index i die drei Ladungen q, $-2q$ und q indiziert. Das elektrische Quadrupole-Moment besitzt nicht-verschwindende Komponenten:

$$Q_{xx} = \sum_i -q_i z_i^2 = -2qa^2[1 + \cos(\omega_0 t)]^2$$

$$Q_{yy} = \sum_i -q_i z_i^2 = -2qa^2[1 + \cos(\omega_0 t)]^2$$

$$Q_{zz} = \sum_i 3qz_i^(2) - q_i z_i^2 = 4qa^2[1 + \cos(\omega_0 t)]^2.$$

(b) Schreiben Sie das obige Multipolmoment zerlegt in die einzelnen Frequenzkomponenten.

Lösung: Normalerweise erfolgt die Zerlegung in die verschiedenen Frequenzmoden mittels der Fourier-Transformation. Hier können wir die einzelnen Moden allerdings nach kurzer Rechnung ablesen:

$$Q_{zz} = 4qa^2[1 + 2\cos(\omega_0 t) + \cos^2(\omega_0 t)] = 4qa^2\left[\frac{3}{2} + 2\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{2}\cos(2\omega_0 t)\right].$$

Da Q_{xx} und Q_{yy} proportional zu Q_{zz} sind, ist ihre Zerlegung proportional zum obigen Ergebnis.
Das elektrische Quadrupol-Moment enthält also zwei Moden nicht- verschwindender Frequenz (ω_0 und $2\omega_0$), und wir bezeichnen die zugehörigen Koeffizienten mit Q_1 und Q_2. Dann findet man:

$$(Q_{1xx}, Q_{1yy}, Q_{1zz}) = (-4qa^2, -4qa^2, 8qa^2)$$

und

$$(Q_{2xx}, Q_{2yy}, Q_{2zz}) = (-qa^2, -qa^2, 2qa^2)$$

(c) Berechnen Sie für jede Frequenz ω die Felder $\vec{B}$ und $\vec{E}$ im Fernfeld mit $a \ll \lambda \ll r$.
Lösung: Wir betrachten nur die beiden Moden nicht-verschwindender Frequenz und definieren für sie die Wellenzahlen

$$k_1 \equiv \frac{\omega_0}{c}$$

$$k_2 \equiv \frac{2\omega_0}{c} = 2k_1$$

Für die ω_0-Mode berechnen wir zunächst den folgendermaßen definierten Vektor:

$$\vec{Q} \equiv \sum_{\alpha,\beta} Q_{1\alpha\beta} n_\beta \mathbf{e}_\beta,$$

wobei $\vec{n} \equiv \frac{\vec{r}}{r}$ und Q_1 aus der letzten Aufgabe bekannt ist.
Mit diesen Definitionen findet man schnell:

$$\vec{Q} = -4qa^2\vec{n} + 12qa^2 n_z \mathbf{e_z}$$

Wir beginnen mit der folgenden allgemeinen Formel, um das elektrische und magnetische Feld der Quadrupolstrahlung zu berechnen:

$$\vec{g}^{(1,el)} = -\frac{i\omega}{24\pi} \sum_{lp} n_l Q_{lp} \mathbf{e_p} = -\frac{i\omega}{24\pi}\vec{Q}$$

Hierbei ist zu beachten, dass die Q's mit zwei Indizes die Quadrupol-Momente sind und der Vektor $\vec{Q}$ wie weiter oben definiert ist.
Hieraus erhält man

$$\vec{g} = -ik\vec{g}^{(1,el)} = -\frac{k^2 c}{24\pi}\vec{Q}$$

In Gauss-Einheiten würde hier ein Faktor $\frac{1}{6}$ anstelle von $\frac{1}{24\pi}$ auftreten. Aufgrund dieses Unterschieds erhält man im SI-System einen Extra-Faktor in den Ausdrücken für die Felder und die Strahlungsleistung. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\vec{B}_1 &= \mu_0 k_1 \frac{ie^{ik_1 r}}{r} \vec{n} \times \vec{g}_1 \\
&= \frac{i\mu_0 c k_1^3 e^{ik_1 r}}{r} \vec{n} \times \vec{Q}_1 \\
&= -\frac{i\mu_0 c k_1^3}{24\pi} \frac{e^{ik_1 r}}{r} \vec{n} \times 12qa^2 n_z \mathbf{e_z} \\
&= -\frac{iqa^2 \mu_0 c k_1^3}{2\pi} \frac{e^{ik_1 r}}{r} (n_y n_z, -n_x n_z, 0)^T,
\end{aligned}$$

wobei wir in der dritten Gleichung die Identität $\vec{n} \times \vec{n} = 0$ verwendet haben, und

$$\begin{aligned}
\vec{E}_1 &= \frac{1}{c} \vec{B}_1 \times \vec{n} \\
&= -\frac{iqa^2 k_1^3}{2\pi\epsilon_0} \frac{e^{ik_1 r}}{r} n_z(-n_x n_z, -n_y n_z, n_x^2 + n_y^2)^T
\end{aligned}$$

Für die $2\omega_0$-Mode erhalten wir analog:

$$\vec{B}_2 = -\frac{iqa^2 \mu_0 c k_2^3}{8\pi} \frac{e^{ik_2 r}}{r} (n_y n_z, -n_x n_z, 0)^T$$

$$\vec{E}_2 = -\frac{iqa^2 k_2^3}{2\pi\epsilon_0} \frac{e^{ik_2 r}}{r} n_z(-n_x n_z, -n_y n_z, n_x^2 + n_y^2)^T.$$

(d) Berechnen Sie die von der Ladungsverteilung abgestrahlte Leistung pro Raumwinkel und die gesamte abgestrahlte Leistung P. Skizzieren Sie $\frac{dP}{d\Omega}$.

Lösung:

Die Strahlungsleistung der ersten Mode ist:

$$\begin{aligned}
\frac{dP_1}{d\Omega} &= \frac{k_1^2}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \mid \vec{n} \times \vec{g_1} \mid^2 \\
&= \frac{k_1^6 c^2}{2 * (24\pi)^2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \mid \vec{n} \times \vec{Q}_1 \mid^2 \\
&= \frac{k_1^6 c^2}{1152\pi^2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} * (12qa^2)^2 \mid (n_y n_z, -n_x n_z, 0) \mid^2 \\
&= \frac{c^2}{8\pi^2} q^2 a^4 k_1^6 \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} n_z^2 (1 - n_z^2) \\
&= \frac{c^2}{8\pi^2} q^2 a^4 k_1^6 \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cos^2\theta \sin^2\theta
\end{aligned}$$

wobei wir n_z als $n_z = c\cos\theta$ geschrieben haben.
Analog erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\frac{dP_2}{d\Omega} &= \frac{k_2^2}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \mid \vec{n} \times \vec{g_2} \mid^2 \\
&= \frac{c^2}{128\pi^2} q^2 a^4 k_2^6 \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} n_z^2 (1 - n_z^2) \\
&= \frac{c^2}{2\pi^2} q^2 a^4 k_1^6 \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cos^2\theta \sin^2\theta
\end{aligned}$$

wobei wir die Relation $k_2 = 2k_1$ verwendet haben.
Wir erwarten Misch-Terme wenn wir die Quadrat-Wurzel aus der kohärenten Summe der elektro-magnetischen Felder der beiden Moden ziehen. Allerdings können wir den zeitgemittelten Mischterm für große Zeiten vernachlässigen. Wir verwenden daher:

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{d\Omega} &= \frac{dP_1}{d\Omega} + \frac{dP_2}{d\Omega} \\
&= \frac{5c^2}{8\pi^2} q^2 a^4 k_1^6 \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cos^2\theta \sin^2\theta
\end{aligned}$$

An dieser Stelle sehen wir, dass $\frac{dP}{d\Omega} \propto \sin^2(2\theta)$. Somit wird $\frac{dP}{d\Omega}$ für $\theta = \pm\frac{\pi}{4}$ maximal und verschwindet für $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$. Eine Skizze findet sich in Abbildung 1.
Integrieren wir über den vollen Raumwinkel erhalten wir für die Abstrahlleistung:

$$\begin{aligned}
P &= \frac{5c^2}{8\pi^2} q^2 a^4 k_1^6 \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sin\theta \cos^2\theta (1 - \cos^2\theta) \\
&= \frac{q^2 a^4 \omega_0^6}{6\pi c^4} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}.
\end{aligned}$$

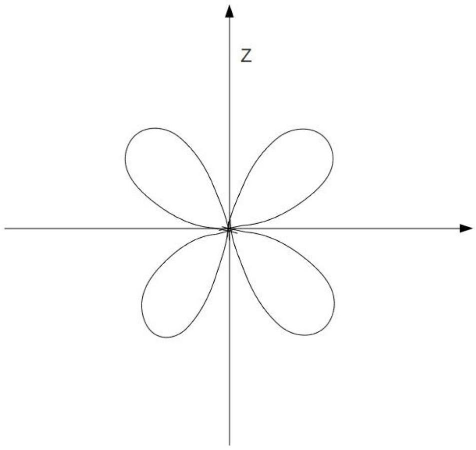

Abbildung 1: Die elektrische Quadrupol-Strahlung besteht aus vier symmetrischen Zonen

Aufgabe 3: **Hohlraumresonator** (10+5=15 Bonuspunkte)

Betrachten Sie einen zylindrischen Hohlraumresonator mit Innenradius a und Länge l.

(a) Finden Sie die Eigenmoden des Resonators.

(b) Drücken Sie die Eigenfrequenzen des Resonators durch die Nullstellen j_{mn} ($\tilde{j}_{mn}$) der Bessel-Funktion bzw. ihrer Ableitung [$J_m(j_{mn}) = 0,\ J'_m(\tilde{j}_{mn}) = 0$] aus.

Wir suchen nach Lösungen der Wellengleichung im Vakuum die sowohl Lösungen der Maxwell-Gleichungen sind als auch die Randbedingungen erfüllen. Hierzu beginnen wir mit der Wellengleichung

$$\left(\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t\right)\Psi(t,\vec{x}) = 0 \tag{7}$$

wobei $\Psi(t,\vec{x})$ hier für die z-Komponente von $\vec{E}(t,\vec{x})$ oder $\vec{B}(t,\vec{x})$ steht.
Aufgrund der Symmetrie des Problems verwenden wir Zylinderkoordinaten und machen für Ψ den Ansatz:

$$\Psi(t,\rho,\phi,z) = Ae^{i(\omega t - kz + m\phi)}f(\rho), \quad A \in \mathbb{C},\ m \in \mathbb{Z} \tag{8}$$

Setzen wir diesen Ansatz in ein finden wir mit dem Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten:

$$-\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \Psi(t,\vec{x}) = \frac{\Psi(t,\vec{x})}{f(\rho)}\frac{1}{\rho}\partial_\rho\rho\partial_\rho f(\rho) - \frac{m^2}{\rho^2}\Psi(t,\vec{x}) - k^2\Psi(t,\vec{x}) \tag{9}$$

Nach kurzer Umformung führt dies zu

$$\rho^2\partial_\rho^2 f(\rho) + \rho\partial_\rho f(\rho) + (\rho^2\underbrace{(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2)}_{=:k_c^2} - m^2)f(\rho) = 0 \tag{10}$$

Wir wollen im Folgenden annehmen, dass $k_c > 0$ gilt. Dann können wir mit $\tilde{\rho} := k_c\rho$ und $\tilde{f}(\tilde{\rho}) := f(\rho)$ umschreiben als

$$\tilde{\rho}^2\tilde{f}''(\tilde{\rho}) + \tilde{\rho}\tilde{f}'(\tilde{\rho}) + (\tilde{\rho}^2 - m^2)\tilde{f}(\tilde{\rho}) = 0 \tag{11}$$

Wir erkennen in (11) die Besselsche Differentialgleichung und eine Lösung dieser ist die Bessel-Funktionen m-ter Ordnung. Da $m \in \mathbb{Z}$ gilt ist die Neumann-Funktionen m-ter Ordnung eine von der Bessel-Funktion m-ter Ordnung linear unabhängige Lösung. Diese hat allerdings für $m \in \mathbb{Z}$ eine Singularität im Ursprung, sodass wir $f(\rho) = \tilde{\alpha}_m J_m(k_c\rho)$ mit $\tilde{\alpha}_m \in \mathbb{C}$ wählen. Somit ist

$$\Psi(t, \rho, \phi, z) = \alpha_m e^{i(\omega t - kz + m\phi)} J_m(k_c\rho), \quad \alpha_m \in \mathbb{C},\ m \in \mathbb{Z} \tag{12}$$

Hierbei haben wir die Konstanten A und $\tilde{\alpha}_m$ in einer neuen Konstante α_m zusammengefasst.
Nun können wir die Maxwell-Gleichungen verwenden um den zur z-Komponente von $\vec{E}$ ($\vec{B}$) gehörigen orthogonalen Anteil $\vec{E}_\perp$ ($\vec{B}_\perp$) zu bestimmen. Hier und im folgenden verwenden wir das Symbol $\perp$ für Anteile von Vektoren senkrecht zur z-Achse. Da $\Psi(t, \rho, \phi, z)$ für die z-Komponente von E- und B-Feld steht fordern wir auch für die anderen Komponenten die Form

$$\vec{E}(t, \vec{x}) = \vec{\tilde{E}}(x, y) e^{i(\omega t - kz)} \tag{13}$$

$$\vec{B}(t, \vec{x}) = \vec{\tilde{B}}(x, y) e^{i(\omega t - kz)} \tag{14}$$

Weiterhin führen wir das Symbol $\vec{\nabla}_\perp := \vec{e}_x\partial_x + \vec{e}_y\partial_y$ ein. Mit (13) und (14) rechnet man leicht die folgenden Relationen nach:

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{E}_\perp(t, \vec{x})\right)_\perp = ik\vec{E}_\perp(t, \vec{x}) \times \vec{e}_z \tag{15}$$

$$\nabla \times (E_z(t, \vec{x})\vec{e}_z) = (\nabla_\perp E_z(t, \vec{x})) \times \vec{e}_z \tag{16}$$

Addiert man diese beiden Gleichungen findet man

$$\begin{aligned}(\nabla \times \vec{E}(t, \vec{x}))_\perp &= (\nabla \times \vec{E}_\perp(t, \vec{x}) + \nabla \times E_z(t, \vec{x})\vec{e}_z)_\perp \\ &= (ik\vec{E}_\perp(t, \vec{x}) + \vec{\nabla}_\perp E_z(t, \vec{x})) \times \vec{e}_z \end{aligned} \tag{17}$$

Unter Zurhilfenahme der dritten Maxwell-Gleichung (Induktionsgesetz) und mit (14) folgt hieraus

$$-i\omega\vec{B}_\perp(t, \vec{x}) = (ik\vec{E}_\perp(t, \vec{x}) + \vec{\nabla}_\perp E_z(t, \vec{x})) \times \vec{e}_z \tag{18}$$

Mit einer analogen Rechnung findet man (im Inneren des Hohlraumresonators gilt $\vec{j} = 0$)

$$i\omega\mu_0\epsilon_0\vec{E}_\perp(t, \vec{x}) = (ik\vec{B}_\perp(t, \vec{x}) + \vec{\nabla}_\perp B_z(t, \vec{x})) \times \vec{e}_z \tag{19}$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$i\omega\vec{B}_\perp(t, \vec{x}) \times \vec{e}_z = ik\vec{E}_\perp(t, \vec{x}) + \vec{\nabla}_\perp E_z(t, \vec{x}) \tag{20}$$

$$-i\omega\mu_0\epsilon_0\vec{E}_\perp(t, \vec{x}) \times \vec{e}_z = ik\vec{B}_\perp(t, \vec{x}) + \vec{\nabla}_\perp B_z(t, \vec{x}) \tag{21}$$

Mit diesen beiden Gleichungen findet man durch Einsetzen (mit $\epsilon_0\mu_0 = c^{-2}$):

$$ik_c^2\vec{E}_\perp(t, \vec{x}) = k\vec{\nabla}_\perp E_z(t, \vec{x}) + \omega(\vec{\nabla}_\perp B_z(t, \vec{x})) \times \vec{e}_z \tag{22}$$

Analog findet man

$$ik_c^2\vec{B}_\perp(t, \vec{x}) = k\vec{\nabla}_\perp B_z(t, \vec{x}) - \frac{\omega}{c^2}(\vec{\nabla}_\perp E_z(t, \vec{x})) \times \vec{e}_z \tag{23}$$

In Zylinderkoordinaten ist $\vec{\nabla}_\perp$ gegeben durch

$$\vec{\nabla}_\perp = \vec{e}_\rho \partial_\rho + \vec{e}_\phi \frac{1}{\rho}\partial_\phi \tag{24}$$

Wir betrachten nun den Fall von TE- und B-Wellen mit $E_z = 0$.
Für $E_z = 0$ folgt aus (22) und (23):

$$ik_c^2 \vec{E}_\perp(t,\vec{x}) = \omega \left(\vec{e}_\rho \frac{1}{\rho}\partial_\phi B_z(t,\vec{x}) - \vec{e}_\phi \partial_\rho B_z(t,\vec{x}) \right) \tag{25}$$

$$ik_c^2 \vec{B}_\perp(t,\vec{x}) = k \left(\vec{e}_\rho \partial_\rho B_z(t,\vec{x}) + \vec{e}_\phi \frac{1}{\rho}\partial_\phi B_z(t,\vec{x}) \right) \tag{26}$$

Nun können wir unseren Ansatz für B_z derart modifizieren, dass er die folgenden Randbedingungen erfüllt:

$$E_\phi(t, \rho = a, \phi, z) = 0 \tag{27}$$

$$B_\rho(t, \rho = a, \phi, z) = 0 \tag{28}$$

Betrachtet man

$$B_z(t,\rho,\phi,z) = \alpha_m e^{i(\omega t - kz + m\phi)} J_m(k_c \rho) \tag{29}$$

erkennt man aus (25) und (26) sofort, dass die Randbedingungen auf dem Zylindermantel erfüllt sind, wenn $k_c a = \tilde{j}_{mn}$ gilt, wobei $\tilde{j}_{mn}$ die n-te Nullstelle der Ableitung der Bessel-Funktion m-ter Ordnung bezeichnet, also

$$J'_m(\tilde{j}_{mn}) = 0 \tag{30}$$

Um die Randbedingungen für die Zylinderkappen berücksichtigen zu können superponieren wir unterschiedliche Lösungen der Wellengleichung und erhalten

$$\mathcal{B}_z(t,\rho,\phi,z) = \beta_m \sin(kz) e^{im\phi} e^{i\omega t} J_m(k_c\rho) \tag{31}$$

mit einer neuen Konstanten $\beta_m \in \mathbb{C}$.
Damit ist die erste longitudinale Randbedingung $\mathcal{B}_z(t,\rho,\phi,z=0) = 0$ automatisch erfüllt. Die zweite longitudinale Randbedingung $\mathcal{B}_z(t,\rho,\phi,z=l) = 0$ ist erfüllt, wenn $k = \frac{p\pi}{l}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ gilt. Somit finden wir aus der Dispersionsrelation $\omega^2 = c^2(k_c^2 + k^2)$ die folgenden Frequenzen der Eigenmoden für TE-Wellen und B-Wellen mit $E_z = 0$:

$$\omega_{mnp}^2 = c^2 \left(\frac{\tilde{j}_{mn}^2}{a^2} + \frac{p^2\pi^2}{l^2} \right), \quad m,p \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \tag{32}$$

$\vec{E}_\perp(t,\vec{x})$ und $\vec{B}_\perp(t,\vec{x})$ lassen sich mit Hilfe von (25) und (26) berechnen.
Das Vorgehen für TM- und E-Wellen mit $B_z = 0$ ist analog, wie wir im Folgenden sehen werden.
Sei also nun $B_z = 0$.
Dann finden wir aus (22) und (23):

$$ik_c^2 \vec{E}_\perp(t,\vec{x}) = k \left(\vec{e}_\rho \partial_\rho E_z(t,\vec{x}) + \vec{e}_\phi \frac{1}{\rho}\partial_\phi E_z(t,\vec{x}) \right) \tag{33}$$

$$ik_c^2 \vec{B}_\perp(t,\vec{x}) = -\frac{\omega}{c^2} \left(\vec{e}_\rho \frac{1}{\rho}\partial_\phi E_z(t,\vec{x}) - \vec{e}_\phi \partial_\rho E_z(t,\vec{x}) \right) \tag{34}$$

Die zu erfüllenden Randbedingungen lauten:

$$E_\phi(t, \rho = a, \phi, z) = 0 \tag{35}$$
$$E_z(t, \rho = a, \phi, z) = 0 \tag{36}$$
$$B_\rho(t, \rho = a, \phi, z) = 0 \tag{37}$$

Wir modifizieren unseren Ansatz

$$E_z(t, \rho, \phi, z) = \alpha_m e^{i(\omega t - kz + m\phi)} J_m(k_c \rho) \tag{38}$$

nun derart, dass er die Randbedingungen (35) - (37) erfüllt.
Zunächst betrachten wir die Randbedingung (36). Ein Vergleich mit (38) zeigt sofort, dass dies erfüllt ist, wenn wir $k_c = \frac{j_{mn}}{a}$ wählen, wobei j_{mn} ($n \in \mathbb{N}$) die n-te Nullstelle der m-ten Bessel-Funktion bezeichnet. Dies erfüllt zugleich die Randbedingungen (35) und (35), denn wie wir aus (33) und (34) sehen, gilt

$$E_\phi(t, \rho = a, \phi, z) = \frac{k}{ik_c^2 \rho} \partial_\phi E_z(t, \vec{x})|_{\rho = a} = \frac{mk}{k_c^2 \rho} \alpha_m e^{i(\omega t - kz + m\phi)} \underbrace{J_m(j_{mn})}_{=0} = 0 \tag{39}$$

und

$$B_\rho(t, \rho = a, \phi, z) = -\frac{\omega}{ik_c^2 c^2 \rho} \partial_\phi E_z(t, \vec{x})|_{\rho = a} = -\frac{m\omega}{k_c^2 c^2} \alpha_m e^{i(\omega t - kz + m\phi)} \underbrace{J_m(j_{mn})}_{=0} = 0 \tag{40}$$

Um auch die Randbedingungen auf den Zylinderkappen berücksichtigen zu können superponieren wir wieder verschiedene Lösungen der Wellengleichung und erhalten

$$\mathcal{E}_z(t, \rho, \phi, z) = \beta_m \sin(kz) e^{im\phi} e^{i\omega t} J_m(k_c \rho) \tag{41}$$

mit einer Konstanten $\beta_m \in \mathbb{C}$.
Auch für diesen Fall gilt, dass die erste longitudinale Randbedingung $\mathcal{E}_z(t, \rho, \phi, z = 0) = 0$ automatisch erfüllt ist und die zweite longitudinale Randbedingung $\mathcal{E}_z(t, \rho, \phi, z = l) = 0$ erfüllt ist, wenn $k = \frac{p\pi}{l}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ gilt. Somit finden wir aus der Dispersionsrelation $\omega^2 = c^2(k_c^2 + k^2)$ die folgenden Frequenzen der Eigenmoden für TM- und B-Wellen mit $B_z = 0$:

$$\omega_{mnp}^2 = c^2 \left(\frac{j_{mn}^2}{a^2} + \frac{p^2 \pi^2}{l^2} \right), \quad m, p \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \tag{42}$$