

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik III

(Theorie C – Elektrodynamik) WS 12-13

Prof. Dr. Alexander Mirlin
Dr. Igor Gornyi

Blatt 11
Besprechung 16.01.2013

Aufgabe 1: **Kugel**

(2+2+2+2=8 Punkte)

Betrachten Sie eine Kugel mit Radius a aus dielektrischem Material. Die Kugel trage eine konstante Polarisierung $\vec{P} = P_0 \vec{e}_z$

- (a) Berechnen Sie die Ladungsdichte ρ_{geb} der lokalisierten Ladungen auf der Oberfläche der Kugel.

Lösung:

Die Ladungsdichte der lokalisierten Ladungen ist gegeben durch

$$\rho_{\text{geb}}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r}). \quad (1)$$

Innerhalb der Kugel gilt

$$\rho_{\text{geb}}(\vec{r}) = 0, \quad r < a. \quad (2)$$

Mit

$$\vec{P}(\vec{r}) = P_0 \vec{e}_z \Theta(a - r), \quad (3)$$

wobei

$$\Theta(a - r) = \begin{cases} 1, & r < a \\ 0, & r > a \end{cases}, \quad (4)$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \rho_{\text{geb}}(\vec{r}) &= -P_0 \vec{\nabla} \cdot (\Theta(a - r) \vec{e}_z) \\ &\stackrel{\text{B1, A1d}}{=} -P_0 \left\{ \vec{e}_z \vec{\nabla} \Theta(a - r) + \Theta(a - r) \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{e}_z)}_{=0} \right\} \\ &\stackrel{\text{B1, A1a}}{=} -P_0 \vec{e}_z \frac{d\Theta(a - r)}{dr} \frac{\vec{r}}{r} \\ &= P_0 \vec{e}_z \cdot \vec{e}_r \delta(r - a) = P_0 \cos \theta \delta(r - a) = \sigma_{\text{pol}} \delta(r - a). \end{aligned} \quad (5)$$

Die Oberflächendichte der Polarisationsladungen erfüllt

$$\sigma_{\text{pol}} = -\left(\underbrace{\vec{P}_2}_{=0} - \underbrace{\vec{P}_1}_{=\vec{P}} \right) \cdot \vec{e}_r = P_0 \vec{e}_z \cdot \vec{e}_r. \quad (6)$$

Vorlesung: Dielektrische Kugel in einem homogenen elektrischen Feld

$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_z = \text{const.}$$

Polarisation innerhalb der Kugel,

$$\vec{P} = \frac{\vec{D} - \vec{E}}{4\pi} = \frac{3}{4\pi} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} E_0 \vec{e}_z = P_0 \vec{e}_z, \quad (7)$$

ist homogen über das ganze Volumen V der Kugel. Also,

$$\sigma_{\text{pol}} = P_0 \cos \theta = \frac{3}{4\pi} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} E_0 \cos \theta. \quad (8)$$

(b) Berechnen Sie das gesamte Dipolmoment der Kugel.

Lösung:

Mit Gl. (5) kann man das gesamte Dipolmoment explizit berechnen:

$$\vec{p} = \int d^3r \vec{r} \rho_{\text{geb}}(r) = P_0 \int d^3r r \delta(r - a) \vec{e}_r (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_r) \quad (9)$$

$$= P_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^\infty dr r^2 r \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \cos \theta \delta(r - a). \quad (10)$$

Die x - und y -Komponenten verschwinden aufgrund der ϕ -Integration und es bleibt nur die z -Komponente:

$$\vec{p} = P_0 \vec{e}_z \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \cos^2 \theta \int_0^\infty dr r^3 \delta(r - a) = P_0 \vec{e}_z 2\pi \frac{2}{3} a^3. \quad (11)$$

Es gilt:

$$\vec{p} = \vec{P}V = P_0 \frac{4}{3} \pi a^3 \vec{e}_z.$$

Eine in ein nichtmagnetisches Medium eingebettete Kugel vom Radius a hat die konstante Magnetisierung $\vec{M} = M_0 \vec{e}_z$.

(c) Berechnen Sie die Oberflächen-Stromdichte $\vec{j}_{\text{geb}}$ der lokalisierten Ladungen.

Lösung:

Da die Magnetisierung außerhalb der Kugel verschwindet, kann man auch schreiben:

$$\vec{M}(\vec{r}) = M_0 \vec{e}_z \Theta(a - r). \quad (12)$$

Die Stromdichte ergibt sich aus (s. Vorlesung)

$$\vec{j}_{\text{geb}}(\vec{r}) = -c \vec{\nabla} \times \vec{M}(\vec{r}) = c M_0 \delta(r - a) \vec{e}_z \times \vec{e}_r = -c M_0 \sin \theta \vec{e}_\varphi. \quad (13)$$

(d) Berechnen Sie das gesamte magnetische Moment $\vec{m}$ der Kugel.

Lösung:

Konstante Magnetisierung $\Rightarrow$

$$\vec{m} = \vec{M}V = M_0 \frac{4}{3} \pi a^3 \vec{e}_z. \quad (14)$$

Explizit:

$$\begin{aligned} \vec{m} &= \frac{1}{2c} \int d^3r [\vec{r} \times \vec{j}_{\text{geb}}(\vec{r})] = \frac{1}{2} M_0 \int d^3r r [\vec{e}_r \times [\vec{e}_z \times \vec{e}_r]] \delta(r - a) \\ &= \frac{1}{2} M_0 \vec{e}_z \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) \int_0^\infty dr r^3 \delta(r - a) \\ &= \frac{1}{2} M_0 \vec{e}_z 2\pi \frac{4}{3} a^3 = \vec{M}V. \end{aligned} \quad (15)$$

Aufgaben 2, 3 und 4 benutzen SI-Einheiten:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E},$$

wobei

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$$

die elektrische Permittivität ist. Die elektrische Suszeptibilität χ ist mit der relativen Permittivität ϵ_r (auch Dielektrizitätskonstante oder Dielektrizitätszahl genannt) über

$$\epsilon_r = 1 - \chi$$

verknüpft.

Aufgabe 2: Kondensator und Dielektrikum (3+2+5=10 Punkte)

Betrachten Sie zwei koaxiale, zylinderförmige Leiter mit Radien $a < b$ und Länge $L \gg b$.

- (a) Berechnen Sie die im Feld gespeicherte Energie W_E für den Fall, dass sich zwischen den Leitern ein Dielektrikum der Dielektrizitätskonstante ϵ befindet.

Lösung:

Für die Energiedichte gilt

$$w_e = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$$

Mit dem Gauss'schen Satz findet man

$$\int \vec{D} d\vec{A} = Q \quad \rightarrow \quad \vec{D} = \frac{Q}{2\pi r L} \vec{e}_r = \epsilon \vec{E}$$

Einsetzen liefert

$$w_e = \frac{Q^2}{8\pi^2 r^2 L^2 \epsilon}$$

Somit folgt für die gespeicherte Energie

$$W_E = \int w_e r dr d\phi dz = \frac{Q^2}{4\pi L \epsilon} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

- (b) Berechnen Sie die Kapazität C der Anordnung.

$$U = \int_a^b E dr = \int_a^b \frac{Q}{2\pi \epsilon r L} dr = \frac{Q}{2\pi \epsilon L} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{Q}{C}$$

$$C = 2\pi \epsilon \frac{L}{\ln(b/a)} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} C_0$$

- (c) Die Zylinder stehen nun in einem Bad dielektrischer Flüssigkeit mit der Suszeptibilität χ_e und Dichte ρ . Der Flüssigkeitsspiegel befindet sich anfangs bei $z = 0$. Bei Anlegen einer Spannung U zwischen den beiden Leitern steigt die Flüssigkeit innerhalb der Zylinder bis zur Höhe $z = h$ an. Im Gleichgewicht gleichen sich elektrostatische und Gravitations-Kraft (mit der Gravitationsbeschleunigung g) aus.

Nehmen Sie das Flüssigkeitsbad als unendlich gross an, d.h. vernachlässige Änderungen im Flüssigkeitsspiegel ausserhalb der Zylinder.

Finden Sie die Höhe h der Flüssigkeit im Gleichgewicht.

Mit dem Gauss'schen Satz findet man direkt, dass für $r < a$ das elektrische Feld null ist. Die mechanische Arbeit, die nötig ist, um die Flüssigkeit auf die Höhe $h + \Delta h$ zu bringen, ist

$$\Delta W_{\text{mech}} = \int_0^h F_G dz = \int_0^h \rho g V dz = \int_0^h \rho g \pi (b^2 - a^2) z dz = \rho g \pi (b^2 - a^2) \frac{1}{2} h^2.$$

Durch das Ansteigen der Flüssigkeit ändert sich die Kapazität des Kondensators:

$$C = 2\pi\epsilon \frac{h}{\ln(b/a)} + 2\pi\epsilon_0 \frac{L-h}{\ln(b/a)}. \quad (16)$$

Dadurch wird elektrische Energie frei, die dann wiederum für einen weiteren Anstieg der Flüssigkeit sorgt. Die Spannung U bleibt konstant.

$$\Delta W_E = \frac{1}{2} \Delta C U^2 = \frac{1}{2} 2\pi(\epsilon - \epsilon_0) \frac{h}{\ln(b/a)} U^2.$$

Im Gleichgewicht gilt

$$F_G = \frac{\partial \Delta W_{\text{mech}}}{\partial h} = F_E = \frac{\partial \Delta W_E}{\partial h} \quad (17)$$

und somit erhalten wir für die Höhe

$$h = \frac{(\epsilon - \epsilon_0) U^2}{\rho g (b^2 - a^2) \ln(b/a)} = \frac{\epsilon_0 \chi_e U^2}{\rho g (b^2 - a^2) \ln(b/a)}. \quad (18)$$

Gauß:

$$h = \frac{\chi_e U^2}{\rho g (b^2 - a^2) \ln(b/a)}. \quad (19)$$

Aufgabe 3: Spiegelladungen mit Dielektrikum (3+4=7 Punkte)

Eine Punktladung q befindet sich auf der z -Achse bei $z = d$. Der Halbraum $z > 0$ wird von einem Dielektrikum der Dielektrizitätskonstante ϵ_1 ausgefüllt, der Halbraum $z < 0$ von einem Medium der Dielektrizitätskonstante ϵ_2 .

- (a) Verwenden Sie die Methode der Spiegelladungen um das elektrostatische Potential im gesamten Raum zu finden.

Lösung:

Um das Potential im Halbraum $z > 0$ zu finden, platzieren wir eine Spiegelladung q' bei $z = -d$. Unter Verwendung von Zylinderkoordinaten hat das Potenzial folgende Form

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left(\frac{q}{\sqrt{\rho^2 + (d-z)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{\rho^2 + (d+z)^2}} \right), \quad z > 0.$$

Für den Bereich $z < 0$ entspricht das Potenzial dem einer Ladung q'' bei $z = d$.

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \left(\frac{q''}{\sqrt{\rho^2 + (d-z)^2}} \right), \quad z < 0.$$

Bei $z = 0$ gelten die folgenden Randbedingungen:

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \begin{pmatrix} \epsilon_1 E_z \\ E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \lim_{z \rightarrow 0^-} \begin{pmatrix} \epsilon_2 E_z \\ E_x \\ E_y \end{pmatrix}.$$

Mit

$$\left. \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (d - z)^2}} \right|_{z=0} = - \left. \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (d + z)^2}} \right|_{z=0} = \frac{d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}}$$

und

$$\left. \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (d - z)^2}} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (d + z)^2}} \right|_{z=0} = - \frac{\rho}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} q - q' &= q'' \\ \frac{1}{\epsilon_1}(q + q') &= \frac{1}{\epsilon_2}q'' \end{aligned}$$

Dies liefert:

$$\begin{aligned} q' &= \left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \right) q \\ q'' &= \left(\frac{2\epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \right) q \end{aligned}$$

und

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_1} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (d - z)^2}} + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (d + z)^2}} \right), \quad z > 0, \quad (20)$$

$$\Phi = \frac{q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (d - z)^2}} \right), \quad z < 0. \quad (21)$$

Grenzfälle:

- $\epsilon_1 = \epsilon_0, \epsilon_2 = \infty$ (Vakuum + Metall):

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (d - z)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (d + z)^2}} \right), \quad z > 0, \quad (22)$$

$$\Phi = 0, \quad z < 0. \quad (23)$$

- $\epsilon_1 = \epsilon_2$:

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_1} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (d - z)^2}} \right), \quad z > 0, \quad (24)$$

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_1} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (d - z)^2}} \right), \quad z < 0. \quad (25)$$

$$(26)$$

- (b) Bestimmen Sie die induzierte Ladungsverteilung sowie die gesamte induzierte Ladung.

Es gilt

$$\sigma_{\text{geb}} = -(\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \vec{n}_{21}.$$

Mit

$$\vec{P}_i = (\epsilon_i - \epsilon_0) \vec{E}_i = (\epsilon_i - \epsilon_0) \vec{\nabla} \Phi(0^\pm)$$

erhält man

$$\sigma_{\text{geb}} = -\frac{q}{2\pi} \frac{\epsilon_0(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{\epsilon_1(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}}$$

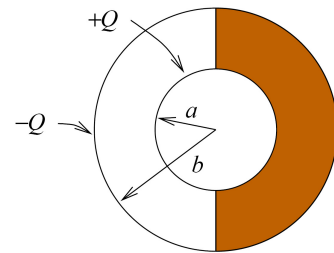
$$Q_{\text{geb}} = \int \sigma_{\text{geb}} dA = -q \frac{\epsilon_0(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{\epsilon_1(\epsilon_1 + \epsilon_2)}$$

Grenzfall $\epsilon_1 = \epsilon_0$, $\epsilon_2 = \infty$ (Vakuum + Metall): $Q_{\text{geb}} = -q$.

Bonusaufgabe **Kugelkondensator**

(4+3+3=10 Bonuspunkte)

Zwei kugelförmige konzentrische Leiter der Radien a, b mit $a < b$ tragen die Ladung $\pm Q$. Der Raum zwischen den Kugeln ist zur Hälfte mit einem Dielektrikum der Dielektrizitätskonstante ϵ gefüllt.



- (a) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}$ im gesamten Raum zwischen den beiden Kugeln.

Lösung:

Ohne das Dielektrikum wäre das elektrische Feld zwischen den beiden Kugeln radial. Man kann nicht annehmen, dass sich das durch das Dielektrikum nicht ändert. Jedoch ist das elektrische Feld mit Sicherheit tangential zur Fläche zwischen den Regionen mit und ohne Dielektrikum. Somit ist die Bedingung $E_1^{\parallel} = E_2^{\parallel}$ automatisch erfüllt. Da es keine Komponente senkrecht zur Grenzfläche gibt, ist die Bedingung $D_1^{\perp} = D_2^{\perp}$ automatisch erfüllt. Somit können wir einen Ansatz der folgenden Form wählen.

$$\vec{E} = c \frac{\vec{e}_r}{r^2}$$

Wir benutzen den Gauss'schen Satz verwenden, um die Konstante c zu bestimmen.

$$\int \vec{D} d\vec{A} = Q \quad \rightarrow \quad \frac{\epsilon_0 c}{r^2} (2\pi r^2) + \frac{\epsilon c}{r^2} (2\pi r^2) = Q$$

Somit erhalten wir

$$c = \frac{Q}{2\pi(\epsilon + \epsilon_0)}$$

- (b) Berechnen Sie die Oberflächenladungsdichte der freien Ladungsträger σ_{frei} auf der inneren Kugel.

Lösung:

Die Oberflächenladungsdichte ist gegeben durch $\sigma = D^\perp|_{r=a}$ wobei $D^\perp = \epsilon_0 E^\perp$ oder $D^\perp = \epsilon E^\perp$ gilt, abhängig von der Region. Somit erhalten wir

$$\sigma = \begin{cases} \frac{\epsilon}{\epsilon + \epsilon_0} \frac{Q}{2\pi a^2}; & \text{dielektrische Hälfte} \\ \frac{\epsilon_0}{\epsilon + \epsilon_0} \frac{Q}{2\pi a^2}; & \text{leere Hälfte} \end{cases}$$

- (c) Berechnen Sie die durch die Polarisation $\vec{P}$ induzierte Ladungsdichte σ_{geb} auf der Oberfläche des Dielektrikums bei $r = a$.

Die Polarisationsladungsdichte ist gegeben durch

$$\rho_{\text{geb}} = -\nabla P$$

Ausserhalb des Dielektrikums ist die Polarisation natürlich null. Mit dem Gauss'schen Satz erhalten wir

$$\sigma_{\text{geb}} = -P^\perp|_{r=a} = -\chi_e E^\perp|_{r=a} = -\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + \epsilon_0} \frac{Q}{2\pi a^2}$$