

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik III (Theorie C – Elektrodynamik) WS 12-13

Prof. Dr. Alexander Mirlin
Dr. Igor Gornyi

Blatt 12
Besprechung 23.01.2013

Aufgabe 1: **Grenzfläche: “Polarisation 2”** (6+4=10 Punkte)

In den Halbräumen $z < 0$ und $z > 0$ seien ϵ_1, μ_1 bzw. ϵ_2, μ_2 mit $\text{Im } \epsilon_i = 0$ und $\text{Im } \mu_i = 0$ gegeben. Im Halbraum $z < 0$ fällt eine ebene Welle mit Wellenvektor $\vec{k}_e$ auf die Grenzfläche. Der Winkel zwischen $\vec{k}_e = (k_{e,x}, 0, k_{e,z})$ und der Flächennormalen sei α_e . Betrachten Sie den Fall “Polarisation 2” aus der Vorlesung:

$$\vec{E} \parallel \text{Einfalsebene}, \quad (1)$$

$$\vec{H} \perp \text{Einfalsebene, d.h. } \vec{H} \parallel \vec{e}_y. \quad (2)$$

- (a) Finden Sie die Amplituden der reflektierten und gebrochenen Wellen in Abhängigkeit der Amplitude der einlaufenden Welle.

Lösung:

Wir betrachten den Übergang zwischen zwei verschiedenen nicht absorbierenden dielektrischen Medien. Die Bezeichnungen für die Winkel und Felder entsprechen denen der Vorlesung.

Die einfallende ebene Welle hat die Form:

$$\begin{aligned} \vec{E}_e(\vec{r}, t) &= \vec{E}_{0,e} e^{i(\vec{k}_e \vec{r} - \omega t)}, \\ \vec{B}_e(\vec{r}, t) &= \frac{c}{n_1} \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \times \vec{E}. \end{aligned} \quad (3)$$

Stetigkeitsbedingungen an der Grenzfläche:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 E_1^\perp &= \epsilon_2 E_2^\perp \\ \vec{E}_1^\parallel &= \vec{E}_2^\parallel \\ B_1^\perp &= B_2^\perp \\ \frac{1}{\mu_1} \vec{B}_1^\parallel &= \frac{1}{\mu_2} \vec{B}_2^\parallel \end{aligned} \quad (4)$$

Es gelten die in der Vorlesung allgemein hergeleiteten Gesetze der geometrischen Optik:

Einfallswinkel = Ausfallswinkel:

$$\alpha_e = \alpha_r \quad (5)$$

Snellius-Brechungsgesetz:

$$n_2 \sin \alpha_g = n_1 \sin \alpha_e \quad (6)$$

Damit sind die Stetigkeitsbedingungen für die Exponentialfaktoren erfüllt. Für die Komponenten der Amplituden muss bei $z = 0$ gelten:

Senkrecht:

$$\epsilon_1 \left(\vec{E}_{0,e} + \vec{E}_{0,r} \right)_z = \epsilon_2 \left(\vec{E}_{0,g} \right)_z \quad (7)$$

$$\left(\vec{B}_{0,e} + \vec{B}_{0,r} \right)_z = \left(\vec{B}_{0,g} \right)_z \quad (8)$$

Parallel:

$$\left(\vec{E}_{0,e} + \vec{E}_{0,r} \right)_{x,y} = \left(\vec{E}_{0,g} \right)_{x,y} \quad (9)$$

$$\frac{1}{\mu_1} \left(\vec{B}_{0,e} + \vec{B}_{0,r} \right)_{x,y} = \frac{1}{\mu_2} \left(\vec{B}_{0,g} \right)_{x,y} \quad (10)$$

Die Einfallsebene ist die x, z -Ebene. Da das Magnetfeld im vorliegenden Fall in y -Richtung zeigt, ist Gl. (8) identisch erfüllt.

Gleichung (7) ergibt:

$$\epsilon_1 (E_{0,e} \sin \alpha_e + E_{0,r} \sin \alpha_r) = \epsilon_2 (E_{0,g} \sin \alpha_g) . \quad (11)$$

Mithilfe von Gl. (6) vereinfacht sich dies zu:

$$E_{0,e} + E_{0,r} = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1} E_{0,g} . \quad (12)$$

Gleichung (9) schließlich liefert:

$$E_{0,e} - E_{0,r} = \frac{\cos \alpha_g}{\cos \alpha_e} E_{0,g} . \quad (13)$$

Aus der Kombination dieser beiden Gleichung erhält man die Amplituden der reflektierten und gebrochenen Welle:

$$E_{0,r} = \frac{\frac{\mu_1}{\mu_2} n_2 \cos \alpha_e - n_1 \cos \alpha_g}{\frac{\mu_1}{\mu_2} n_2 \cos \alpha_e + n_1 \cos \alpha_g} E_{0,e} \stackrel{\mu_1 \equiv \mu_2}{\Rightarrow} \frac{\tan(\alpha_e - \alpha_g)}{\tan(\alpha_e + \alpha_g)} E_{0,e} , \quad (14)$$

$$E_{0,g} = \frac{2 n_1 \cos \alpha_e}{\frac{\mu_1}{\mu_2} n_2 \cos \alpha_e + n_1 \cos \alpha_g} E_{0,e} \stackrel{\mu_1 \equiv \mu_2}{\Rightarrow} \frac{2 \sin(2\alpha_e)}{\sin(2\alpha_e) + \sin(2\alpha_g)} E_{0,e} , \quad (15)$$

wobei der letzte Schritt jeweils eine Vereinfachung unter Verwendung von Gl. (6) und trigonometrischer Additionstheoreme ist.

Die magnetischen Felder sind gegeben durch

$$H_g = \frac{n_2}{\mu_2} E_g , \quad (16)$$

$$H_r = \frac{n_1}{\mu_1} E_r . \quad (17)$$

- (b) Berechnen Sie den Transmissionskoeffizient T der Grenzfläche. Skizzieren Sie T als Funktion von α_e .

Lösung:

Die Intensität der auf die Grenzfläche auftreffenden Strahlung ist die senkrechte Projektion des Poynting-Vektors:

$$I = |\vec{S} \cdot \hat{z}| = \left| \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot \hat{z} \right|. \quad (18)$$

Somit gilt für die Intensitäten von einfallender, reflektierter und gebrochener Welle:

$$\begin{aligned} I_e &= \frac{c}{4\pi} E_{0,e} H_{0,e} \cos \alpha_e, \\ I_r &= \frac{c}{4\pi} E_{0,r} H_{0,r} \cos \alpha_e, \\ I_g &= \frac{c}{4\pi} E_{0,g} H_{0,g} \cos \alpha_g. \end{aligned} \quad (19)$$

Für den Transmissionskoeffizienten gilt:

$$T = \frac{4 \frac{\mu_1}{\mu_2} n_1 n_2 \cos \alpha_e \cos \alpha_g}{\left(\frac{\mu_1}{\mu_2} n_2 \cos \alpha_e + n_1 \cos \alpha_g \right)^2}, \quad (20)$$

und für $\mu_1 = \mu_2$,

$$T = \frac{4 \sin 2\alpha_g \sin 2\alpha_e}{(\sin 2\alpha_e + \sin 2\alpha_g)^2}. \quad (21)$$

Um diesen skizzieren zu können wird α_g mittels Gl. (6) ersetzt ($\eta = \mu_1/\mu_2$, $\nu = n_1/n_2$):

$$T = \frac{4\eta\nu \cos \alpha_e \sqrt{1 - \nu^2 \sin^2 \alpha_e}}{\left(\eta \cos \alpha_e + \nu \sqrt{1 - \nu^2 \sin^2 \alpha_e} \right)^2}. \quad (22)$$

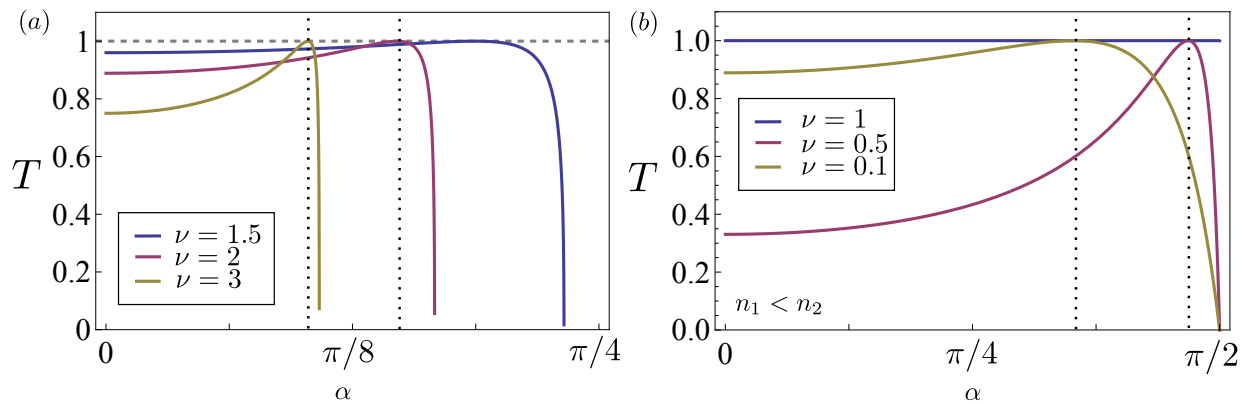
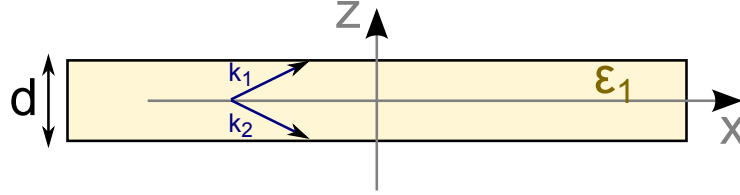


Abbildung 1: Der Transmissionskoeffizient (22) für $\mu_1 = \mu_2$ und (a) $\nu = n_1/n_2 > 1$, (b) $\nu \leq 1$. Die vertikalen gepunkteten Linien markieren den Brewsterwinkel.

Aufgabe 2: Wellenausbreitung in dielektrischer Platte

(4+4=8 Punkte)

Eine dielektrische Platte der Dicke d mit Dielektrizitätskonstante ϵ_1 befinde sich in der xy -Ebene. Der Aussenraum sei Luft mit $\epsilon = 1$. In die Platte wird eine ebene elektromagnetische Welle injiziert. Die Welle ist in y -Richtung polarisiert ($\vec{E} \parallel \vec{e}_y$).



- Mit welcher Geschwindigkeit propagiert die Welle entlang der Platte?
- Was ist die Bedingung dafür, dass die Welle unendlich lange innerhalb der Platte propagiert?

Hinweis: Betrachten Sie dazu folgenden Ansatz für das Vektorpotential innerhalb der Platte:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_1 e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t)} + \vec{A}_2 e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t)} = \vec{A}_1 e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)} + \vec{A}_2 e^{i(k_x x - k_z z - \omega t)}, \quad (23)$$

wobei A_1 und A_2 jeweils durch Reflexion an den Grenzflächen auseinander hervorgehen. Es ergibt sich eine transzendente Gleichung für den Winkel α zwischen $\vec{k}_{1,2}$ und der Normalen der Grenzfläche. Die Lösung kann graphisch erfolgen.

Lösung:

Wir betrachten die Platte als einfaches Beispiel für die Übertragung von Licht in Glasfaserkabeln. Aus der Bedingung, dass $\vec{E}$ in y -Richtung zeigt folgt somit $\vec{A} = A \vec{e}_y$ und weiterhin, dass $\vec{B}$ in der x - z -Ebene liegt. Die Welle, welche in die Platte mit Brechungsindex $n = \sqrt{\epsilon_1}$ injiziert wird (roter Pfeil in Abb. 2), ist im Halbraum $x > 0$ und innerhalb der Platte darstellbar durch die Felder

$$\vec{A}_1 = A_1 \vec{e}_y e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - i\omega t}, \quad (24)$$

$$\vec{A}_2 = A_2 \vec{e}_y e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - i\omega t}, \quad (25)$$

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2. \quad (26)$$

Oberhalb und unterhalb der Platte ist das Vektorpotential (s. Abb. 2),

$$\vec{A}_{g,1} = A_{g,1} \vec{e}_y e^{i\vec{k}_{g,1} \cdot (\vec{r} - \vec{e}_z d/2) - i\omega t}, \quad (27)$$

$$\vec{A}_{g,2} = A_{g,2} \vec{e}_y e^{i\vec{k}_{g,2} \cdot (\vec{r} + \vec{e}_z d/2) - i\omega t}. \quad (28)$$

Hierbei haben wir zweckmäßigerweise aus $A_{g,i}$ den Phasenfaktor $\exp(\mp i\vec{k}_{g,i} \cdot \vec{e}_z d/2)$ abgespalten.

Die Wellenvektoren $\vec{k}_i$ in Gl. (24)-(28) können komplex sein. Da $\vec{k}_1$ und $\vec{k}_2$ durch Reflexion auseinander hervorgehen erhalten wir

$$\vec{k}_1 = (k_x, 0, k_z)^T, \quad (29)$$

$$\vec{k}_2 = (k_x, 0, -k_z)^T. \quad (30)$$

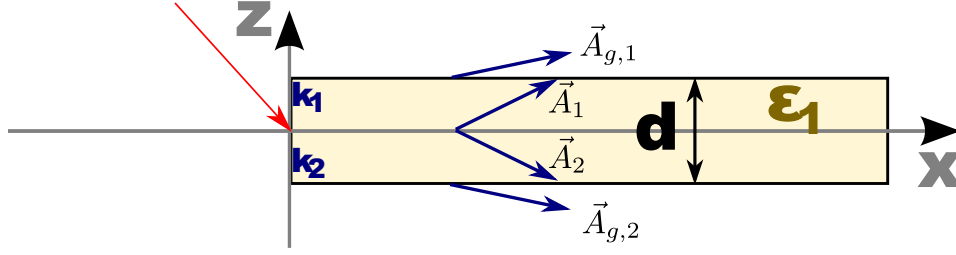


Abbildung 2: Eine Beispielanordnung mit einer Welle, die in die Platte bei $x = 0$ injiziert wird.

Aus Symmetriegründen gilt

$$\vec{k}_{g,1} = \vec{k}_g = (k_{g,x}, 0, k_{g,z})^T, \quad (31)$$

$$\vec{k}_{g,2} = (k_{g,x}, 0, -k_{g,z})^T. \quad (32)$$

Aus dem Snelliusschen Gesetz erhalten wir

$$k_{g,x} = k_x. \quad (33)$$

Wir suchen Lösungen, die einen stationären Zustand beschreiben, daher folgt $\text{Im } \omega = 0$. Aus der Wellengleichung

$$\left(\nabla^2 - \frac{n^2}{c^2} \partial_t^2 \right) \vec{A} = 0 \quad (34)$$

erhalten wir für den Innenraum $|z| < d/2$:

$$\frac{n^2}{c^2} \omega^2 = k_x^2 + k_z^2. \quad (35)$$

Wir bezeichnen den Real- und Imaginärteil von k_i mit k'_i und k''_i . Dann erhalten wir aus Gl (35),

$$\frac{n^2}{c^2} \omega^2 = (k'_x + i k''_x)^2 + (k'_z + i k''_z)^2 \Rightarrow \quad (36)$$

$$\text{Re:} \quad \frac{n^2}{c^2} \omega^2 = k_x'^2 - k_x''^2 + k_z'^2 - k_z''^2 \quad (37)$$

$$\text{Im:} \quad k'_x k''_x + k'_z k''_z = 0. \quad (38)$$

Aus der Wellengleichung (34), für $|z| > d/2$ folgt

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_x'^2 - k_x''^2 + k_{g,z}'^2 - k_{g,z}''^2, \quad (39)$$

$$k'_x k''_x + k'_{g,z} k''_{g,z} = 0, \quad (40)$$

$$k_{g,z}^2 = k_z^2 - (n^2 - 1) \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (41)$$

Die Komponenten $\vec{A}_1$ und $\vec{A}_2$ sollen jeweils durch Reflexion aus einander hervorgehen. Das bedeutet, sie müssen an der oberen und unteren Grenzfläche die Stetigkeitsbedingungen erfüllen. Das elektrische und magnetische Feld erhalten wir aus

den Vektorpotentialen gemäß

$$\vec{E}_i = -\partial_t \vec{A}_i = i\omega \vec{A}_i, \quad (42)$$

$$\vec{B}_i = \nabla \times \vec{A}_i, \quad (43)$$

$$\nabla \times \vec{A} = i(A_1 e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}} + A_2 e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}}) k_x \vec{e}_z + i(A_1 e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}} - A_2 e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}}) k_z \vec{e}_x, \quad (44)$$

$$\nabla \times \vec{A}_{g,i} = iA_{g,i}(k_{g,x} \vec{e}_z + k_{g,z} \vec{e}_x) e^{i\vec{k}_g \cdot \vec{r}}. \quad (45)$$

Wir benutzen nun die Stetigkeitsbedingungen bei $z = \pm d/2$. Die parallele Komponente des elektrischen Feldes $\vec{e}_y \cdot \vec{E} = E^\parallel$ ist stetig an den Grenzflächen. Die Stetigkeitsbedingung für $\vec{E}^\perp = 0$ ist aufgrund der Polarisation automatisch erfüllt. Es gilt überall $\mu = 1$ und daher ist $\vec{B}$ (mit $\vec{e}_x \cdot \vec{B} = B^\parallel$ und $\vec{e}_z \cdot \vec{B} = B^\perp$) ebenfalls stetig an den Grenzflächen.

Wir benutzen Gl. (42)-(45) und erhalten aus den Stetigkeitsbedingungen

$$E^\parallel : \quad \vec{A}_1 e^{ik_z d/2} + \vec{A}_2 e^{-ik_z d/2} = \vec{A}_g, \quad (46)$$

$$B^\perp : \quad \left[\vec{k}_1 \times \vec{A}_1 \right]_z e^{ik_z d/2} + \left[\vec{k}_2 \times \vec{A}_2 \right]_z e^{-ik_z d/2} = \left[\vec{k}_g \times \vec{A}_g \right]_z, \quad (47)$$

$$B^\parallel : \quad \left[\vec{k}_1 \times \vec{A}_1 \right]_x e^{ik_z d/2} + \left[\vec{k}_2 \times \vec{A}_2 \right]_x e^{-ik_z d/2} = \left[\vec{k}_g \times \vec{A}_g \right]_x, \quad (48)$$

für $z = +d/2$:

$$E^\parallel : \quad A_1 e^{ik_z d/2} + A_2 e^{-ik_z d/2} = A_{g,1}, \quad (49)$$

$$B^\perp : \quad k_x A_1 e^{ik_z d/2} + k_x A_2 e^{-ik_z d/2} = k_{g,x} A_{g,1}, \quad (50)$$

$$B^\parallel : \quad k_z A_1 e^{ik_z d/2} - k_z A_2 e^{-ik_z d/2} = k_{g,z} A_{g,1}, \quad (51)$$

und für $z = -d/2$ entsprechend,

$$E^\parallel : \quad A_1 e^{-ik_z d/2} + A_2 e^{ik_z d/2} = A_{g,2}, \quad (52)$$

$$B^\perp : \quad k_x A_1 e^{-ik_z d/2} + k_x A_2 e^{ik_z d/2} = k_{g,x} A_{g,2}, \quad (53)$$

$$B^\parallel : \quad k_z A_1 e^{-ik_z d/2} - k_z A_2 e^{ik_z d/2} = -k_{g,z} A_{g,2}. \quad (54)$$

Aus Gl. (49) und (50) [sowie aus Gl. (52) und (53)] gewinnen wir explizit Gl. (33).

Aus Gl. (49),(51),(52) und (54) erhalten wir

$$\underbrace{\begin{pmatrix} (-k_z + k_{g,z}) e^{ik_z d/2} & (k_z + k_{g,z}) e^{-ik_z d/2} \\ (-k_z - k_{g,z}) e^{-ik_z d/2} & (k_z - k_{g,z}) e^{ik_z d/2} \end{pmatrix}}_{\mathbb{M}} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0. \quad (55)$$

Aus der Bedingung $\det \mathbb{M} = 0$ folgt

$$e^{2ik_z d} = \left(\frac{k_z + k_{g,z}}{k_z - k_{g,z}} \right)^2. \quad (56)$$

Daraus folgt weiter

$$e^{ik_z d} = \pm \frac{k_z + k_{g,z}}{k_z - k_{g,z}}, \quad (57)$$

$$e^{ik_z d/2} (k_z - k_{g,z}) = \pm e^{-ik_z d/2} (k_z + k_{g,z}) \quad (58)$$

$$\Leftrightarrow k_{g,z} (e^{ik_z d/2} \pm e^{-ik_z d/2}) = k_z (e^{ik_z d/2} \mp e^{-ik_z d/2}), \quad (59)$$

und wir erhalten schließlich die zwei Gleichungen

$$k_{g,z} = ik_z \tan \frac{k_z d}{2}, \quad (60)$$

$$k_{g,z} = -ik_z \cot \frac{k_z d}{2}. \quad (61)$$

Aus der Dispersionsrelation (37) erhalten wir die Gruppengeschwindigkeit

$$v_x = \frac{\partial \omega}{\partial k'_x} = \sin \alpha \frac{\partial \omega}{\partial k} \quad (62)$$

Für die Moden des Wellenleiters mit $k''_x = 0$ gilt

$$v_x = \frac{c}{n} \sin \alpha. \quad (63)$$

Die nicht resonanten Moden werden wir am Ende der Musterlösung diskutieren.

Was ist die Bedingung dafür, dass die Welle unendlich lange innerhalb der Platte propagiert?

Lösung:

Damit die Welle unendlich lange in x-Richtung propagiert, muss $k''_x = 0$, $k'_x \neq 0$ erfüllt sein. Aus Gl. (38) folgt dann $k'_z = 0$ oder $k''_z = 0$ und mit Gl. (60), bzw. (61), $k'_{g,z} = 0$. Für $k'_z \neq 0$ und $k''_z = 0$ erhalten wir aus Gl. (37) und (39),

$$k_x = \frac{n\omega}{c} \sin \alpha, \quad (64)$$

$$k_z = \frac{n\omega}{c} \cos \alpha, \quad (65)$$

$$k_{g,x} = \frac{\omega}{c} \cosh \eta = k_x, \quad (66)$$

$$k_{g,z} = i \frac{\omega}{c} \sinh \eta = i \frac{\omega}{c} \sqrt{n^2 \sin^2 \alpha - 1}. \quad (67)$$

$$(68)$$

Einsetzen in Gl. (60) ergibt die gesuchte transzendente Gleichung für α für die geraden [d.h. $E(z) = E(-z)$] TE-Moden:

$$\frac{\sqrt{n^2 \sin^2 \alpha - 1}}{n \cos \alpha} = \tan \frac{n\omega d \cos \alpha}{2c}. \quad (69)$$

Einsetzen in Gl. (61) ergibt die Dispersionsgleichung für die ungeraden [$E(z) = -E(-z)$] TE-Moden:

$$\frac{\sqrt{n^2 \sin^2 \alpha - 1}}{n \cos \alpha} = -\cot \frac{n\omega d \cos \alpha}{2c}. \quad (70)$$

Die Lösung von Gl. (69),(70) kann numerisch oder grafisch gemäß der Abb. 3 erfolgen. Hierbei hat Gl. (69) mindestens eine Lösung. Die Anzahl der Lösungen bei festem n wird durch den Parameter $\delta = n\omega d/c$ bestimmt. Gleichung (70) hat keine

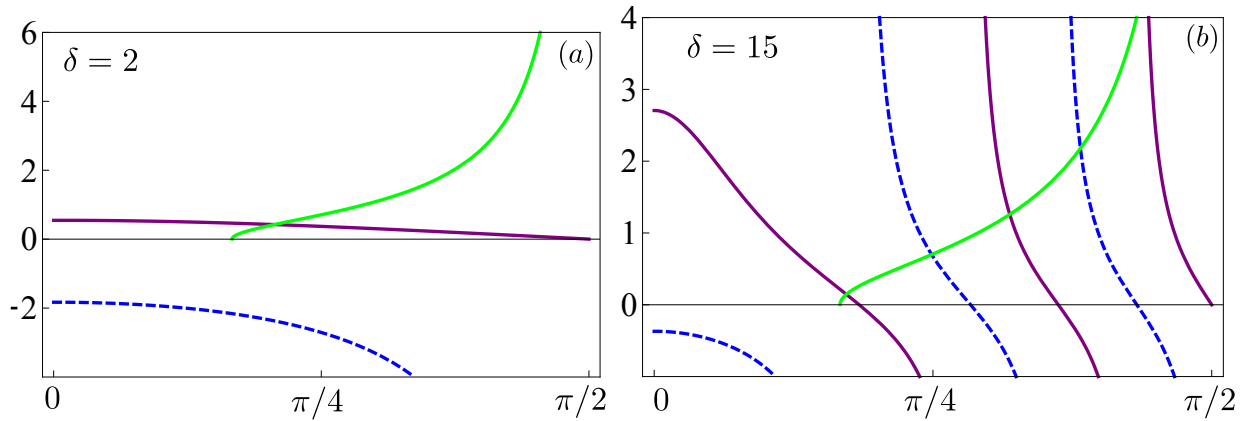


Abbildung 3: Darstellung der grafischen Lösung von Gl. (69),(70) für $n = 2$ und jeweils (a) $\delta = n\omega d/c = 2$ bzw. (b) $\delta = 15$. Die Lösung von Gl. (69) ist gegeben durch die Schnittpunkte der beiden Kurven $\tan(\delta \cos \alpha/2)$ und $\sqrt{n^2 \sin^2 \alpha - 1}/n \cos \alpha$. Abbildung (b) zeigt neben $\tan(\delta \cos \alpha/2)$ (violette Linie) auch $-\cot(\delta \cos \alpha/2)$ (gestrichelte blaue Linie).

Lösung für $\delta < \pi n/\sqrt{n^2 - 1}$.

Für den Fall $k'_z = 0$ und $k''_z \neq 0$ erhalten wir aus Gl. (37) und (39) entsprechend

$$k_x = k'_x = \frac{n\omega}{c} \sin \alpha, \quad (71)$$

$$-k''_z = k_z^2 = \frac{n^2 \omega^2}{c^2} - k_x^2 = \frac{n^2 \omega^2}{c^2} \cos^2 \alpha > 0, \quad (72)$$

und damit keine Lösung.

Aufgabe 3: Schicht

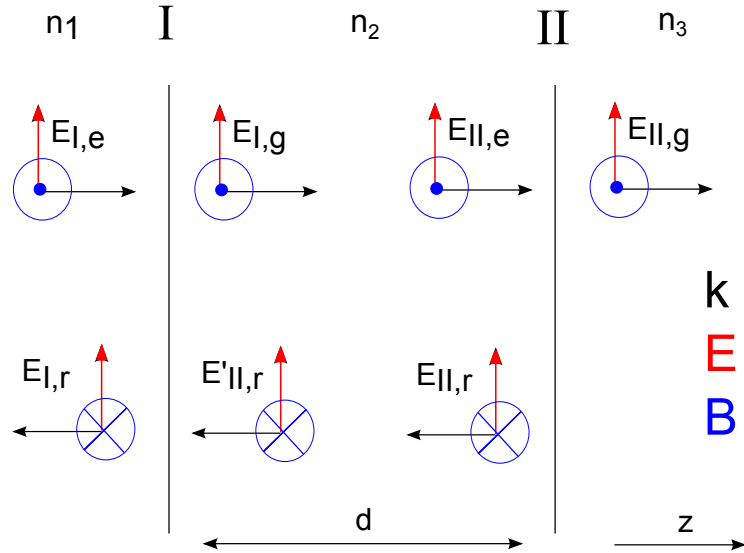
(5+2=7 Punkte)

Ein Halbraum mit Dielektrizitätskonstante ϵ_3 wird mit einer Schicht der Dicke d und Dielektrizitätskonstante ϵ_2 belegt. Aus dem anderen Halbraum mit ϵ_1 , fällt senkrecht auf die Grenzfläche eine ebene, monochromatische (Frequenz ω), elektromagnetische Welle ein. Es kann angenommen werden, dass die Permeabilität μ_i für alle drei Bereiche gleich eins ist.

(a) Berechnen Sie den Reflexionskoeffizient R der Schicht.

Lösung:

Wir betrachten die Stetigkeitsbedingungen an den beiden Grenzflächen I (ϵ_1 zu ϵ_2) und II (ϵ_2 zu ϵ_3). Weil die Welle senkrecht einfällt haben die Felder nur Komponenten tangential zu den Grenzflächen. Der Einfachheit halber sei die Propagationsrichtung entlang der z-Achse, somit ist das E -Feld in x-Richtung und das B -Feld in y-Richtung. Es kann also skalar gerechnet werden:



$$E(z, t) = E_0 e^{i(k_i z - \omega t)}, \quad (73)$$

$$B(z, t) = B_0 e^{i(k_i z - \omega t)} = \frac{1}{v_i} E_0 e^{i(k_i z - \omega t)}, \quad (74)$$

wobei k_i und $v_i = \frac{c}{n_i}$ der Wellenvektor bzw. die Geschwindigkeit im jeweiligen Medium sind.

Grenzfläche I:

$$E_{I,e} + E_{I,r} = E_{I,g} + E'_{II,r} \quad (75)$$

$$B_{I,e} - B_{I,r} = B_{I,g} - B'_{II,r} \Rightarrow n_1 (E_{I,e} - E_{I,r}) = n_2 (E_{I,g} - E'_{II,r}) \quad (76)$$

Grenzfläche II:

$$E_{II,e} + E_{II,r} = E_{II,g} \quad (77)$$

$$B_{II,e} - B_{II,r} = B_{II,g} \Rightarrow n_2 (E_{II,e} - E_{II,r}) = n_3 E_{II,g} \quad (78)$$

Beim Durchlaufen der Schicht erfolgt eine Phasenverschiebung:

$$E_{II,e} = E_{I,g} e^{-ik_2 d}, \quad (79)$$

$$E'_{II,r} = E_{II,r} e^{-ik_2 d}, \quad (80)$$

wobei $k_2 = \frac{\omega}{c} n_2$ der Wellenvektor im Medium der Schicht ist.

Diese Phasenverschiebung wird nun in die obigen Stetigkeitsbedingungen eingesetzt. Addition von Gl. (75) und Gl. (76) ergibt einen Ausdruck für das einfallende Feld:

$$E_{I,e} = E_{I,g} + E_{II,r} e^{-ik_2 d} + \frac{1}{2} \frac{n_2}{n_1} (E_{I,g} - E_{II,r} e^{-ik_2 d}) \quad (81)$$

Und die Subtraktion ergibt das reflektierte Feld:

$$E_{I,r} = E_{I,g} + E_{II,r}e^{-ik_2d} - \frac{1}{2} \frac{n_2}{n_1} (E_{I,g} - E_{II,r}e^{-ik_2d}) \quad (82)$$

Durch Addition von Gl. (77) und Gl. (78) wird $E_{II,g}$ eliminiert. Das Ergebnis ist ein Ausdruck für $E_{I,g}$ in Abhängigkeit von $E_{II,r}$. Dies wird in den Quotienten von Gl. (81) und Gl. (82) eingesetzt. Nach Vereinfachung ergibt sich:

$$\frac{E_{I,r}}{E_{I,e}} = \frac{(n_1 - n_2)(n_2 + n_3)e^{ik_2d} + (n_1 + n_2)(n_2 - n_3)e^{-ik_2d}}{(n_1 + n_2)(n_2 + n_3)e^{ik_2d} + (n_1 - n_2)(n_2 - n_3)e^{-ik_2d}} \quad (83)$$

$$\Leftrightarrow \frac{E_{I,r}}{E_{I,e}} = \frac{n_2(n_1 - n_3) \cos k_2d + i(n_2^2 - n_1n_3) \sin k_2d}{n_2(n_1 - n_3) \cos k_2d - i(n_2^2 - n_1n_3) \sin k_2d} \quad (84)$$

Das Betragsquadrat dieses Ausdrucks ist der gesuchte Reflexionskoeffizient.

(b) Für welche Wahl der Parameter wird $R = 0$?

Lösung:

Der Reflexionskoeffizient verschwindet für den trivialen Fall $n_1 = n_2 = n_3$.

Außerdem kann man auch eine Platte wählen mit $n_2 = \sqrt{n_1n_3}$ und $d = \frac{\lambda}{4}$ (λ ist hier natürlich die Wellenlänge im Dielektrikum der Schicht).

Bonusaufgabe Spiegelströme

(3+2=5 Bonuspunkte)

Eine Stromverteilung $\vec{j}(\vec{r})$ befindet sich im Halbraum $z > 0$ in einem Medium mit Permeabilität $\mu = 1$. Der Halbraum $z < 0$ ist mit einem Material der Permeabilität μ_r gefüllt.

(a) Die magnetische Induktion $\vec{B}$ für $z > 0$ bzw. $z < 0$ kann berechnet werden, indem das Material bei $z < 0$ bzw. $z > 0$ durch eine Spiegelstromverteilung $\vec{j}'$ bzw. $\vec{j}''$ ersetzt wird.

Drücken Sie die Komponenten von $\vec{j}'$ und $\vec{j}''$ durch $\vec{j}$ aus.

Lösung:

Analog zu den Berechnungen für Spiegelladungen von Blatt 11 machen wir folgenden Ansatz für die Spiegelströme,

$$\begin{aligned} j'_x(x, y, z) &= \lambda' j_x(x, y, -z), \\ j'_y(x, y, z) &= \lambda' j_y(x, y, -z), \\ j'_z(x, y, z) &= -\lambda' j_z(x, y, -z), \\ \vec{j}'' &= \lambda'' \vec{j}. \end{aligned} \quad (85)$$

Es gilt also für $z > 0$:

$$\begin{aligned} \vec{B}_{z>0} &= \frac{1}{c} \int dV' \frac{[\vec{j}(\vec{r}') + \vec{j}'(\vec{r}')] \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ &= \frac{1}{c} \int_{z'>0} dV' \left[\frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \frac{\vec{j}'(P\vec{r}') \times (\vec{r} - P\vec{r}')}{|\vec{r} - P\vec{r}'|^3} \right]. \end{aligned} \quad (86)$$

Dabei wurde das Integral mit Hilfe des Operators P auf $z > 0$ beschränkt. P wirkt auf die Koordinaten (x, y, z) , indem es z mit $-z$ vertauscht: $P : (x, y, z) \rightarrow (x, y, -z)$.

Für $z \rightarrow 0$ erhalten wir

$$\vec{B}_{z=0+} = \frac{1}{c} \int_{z'>0} dV' \left[\frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \frac{\lambda' P \vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - P \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right]_{z=0}. \quad (87)$$

Für $z < 0$ haben wir

$$\vec{B}_{z<0} = \frac{\lambda'' \mu_r}{c} \int_{z'>0} dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (88)$$

d.h. $\vec{B}$ wird von einer Stromdichte $\vec{j}'' = \lambda'' \vec{j}$ im Material mit Permeabilität μ_r erzeugt.

Wir verwenden die Stetigkeitsbedingungen an der Grenzschicht $z = 0$ um die Koeffizienten λ' , λ'' zu bestimmen. Aus der Stetigkeit der Normalenkomponente des magnetischen Feldes $B_\perp = \hat{z} \cdot \vec{B}$ und Gl. (87) und (88) erhalten wir

$$\int_{z'>0} dV' \frac{(1 + \lambda') \hat{z} \cdot [\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')] }{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \lambda'' \mu_r \int_{z'>0} dV' \frac{\hat{z} \cdot [\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')] }{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (89)$$

wobei wir benutzt haben, dass $\hat{z} \cdot [P \vec{j}(\vec{r}') \times P(\vec{r} - \vec{r}')]_{z=0} = \hat{z} \cdot [\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')]_{z=0}$, wie durch explizite Rechnung einfach gezeigt werden kann. Gleichung (89) ist erfüllt, wenn die Integranden auf beiden Seiten gleich sind. Wie erhalten also

$$(1 + \lambda') \hat{z} \cdot [\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')] = \lambda'' \mu_r \left[\hat{z} \cdot [\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')] \right], \quad (90)$$

$$\Leftrightarrow (1 + \lambda' - \mu_r \lambda'') [j_x(y - y') - j_y(x - x')] = 0. \quad (91)$$

Aus der Stetigkeitsbedingung der Tangentialkomponente von $\vec{H} = \vec{B}/\mu$ erhalten nach gleichsetzen der Integranden

$$(1 - \lambda' - \lambda'') \begin{pmatrix} -j_y z' - j_z(y - y') \\ j_x z' + j_z(x - x') \end{pmatrix} = 0. \quad (92)$$

Gleichung (91) und (92) gelten für alle x , x' , y und y' , falls

$$1 - \lambda' - \lambda'' = 0, \quad (93)$$

$$1 + \lambda' - \mu_r \lambda'' = 0. \quad (94)$$

Daraus erhalten wir schließlich

$$\lambda' = \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1}, \quad (95)$$

$$\lambda'' = \frac{2}{\mu_r + 1}. \quad (96)$$

- (b) Stellen Sie dazu unter Verwendung obiger Annahmen Gleichungen für $\vec{B}$ jeweils für $z > 0$ und $z < 0$ auf.

Lösung:

Das magnetische Feld im oberen und unteren Halbraum folgt aus Gl. (86), (88) und Gl. (95), (96):

$$\vec{B}_{z>0} = \frac{1}{c} \int_{z'>0} dV' \left[\frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \frac{P \vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - P\vec{r}')}{|\vec{r} - P\vec{r}'|^3} \right]. \quad (97)$$

$$\vec{B}_{z<0} = \frac{1}{c} \frac{2\mu_r}{\mu_r + 1} \int_{z'>0} dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (98)$$

Kommentar zur Aufgabe 2:

Wir diskutieren kurz den Fall, dass die Welle nicht unendliche lange im Wellenleiter propagiert. Der folgende Abschnitt ist als Zusatzinformation gedacht und wurde nicht als Lösung erwartet.

Im allgemeinen Fall und für eine realistische Anordnung hängt das Verhalten stark von der Art und Weise ab, wie das Licht in die Platte injiziert wird (s. Abb. 2) oder wie Licht innerhalb der Platte durch eine mögliche Quelle erzeugt wird. Aber auch im allgemeinen Fall propagieren nur die Eigenmoden, welche in der vorhergehenden Aufgabe gefunden wurden, unendlich lange in x-Richtung.

Nach der geometrischen Optik würde man erwarten, dass die Welle im Dielektrikum verbleibt, wenn an den Grenzflächen Totalreflexion auftritt. Dies erfordert

$$\alpha \geq \alpha_c : \quad \sin \alpha \geq \frac{1}{n} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{n^2 \sin^2 \alpha - 1} \in \mathbb{R}. \quad (99)$$

Für alle Lösungen von Gl. (69), (70) tritt tatsächlich Totalreflexion auf, d.h. $\alpha \geq \alpha_c$. Das ist die Bedingung, dass die Welle das Material nicht sofort wieder verlässt. Es ergibt sich jedoch aus Gl. (69), (70), dass nicht jeder Winkel $\alpha \geq \alpha_c$ für die Ausbreitungsmoden erlaubt ist. Dies steht im Gegensatz zu der Erwartung, basierend auf der geometrischen Optik (s. Abb. 4), und geschieht aufgrund destruktiver Interferenz der Wellen, die an beiden Grenzflächen reflektiert werden.

Im Allgemeinen genügt die vollständige Lösung der skalaren Helmholtz-Gleichung

$$\frac{\partial^2 A(x, z)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A(x, z)}{\partial x^2} + k_0^2 n^2(z) A(x, z) = 0, \quad (100)$$

mit

$$n(z) = n \theta(d/2 - |z|) + \theta(|z| - d/2) \quad (101)$$

und

$$k_0 = \omega/c. \quad (102)$$

Der vollständige Satz von Eigenmoden kann in der folgenden Form dargestellt werden:

$$A(x, z) = a(z) e^{i\beta x - i\omega t}, \quad (103)$$

wobei $a(z)$ die Gleichung

$$\frac{d^2 a(z)}{dz^2} + [k_0^2 n^2(z) - \beta^2] a(z) = 0. \quad (104)$$

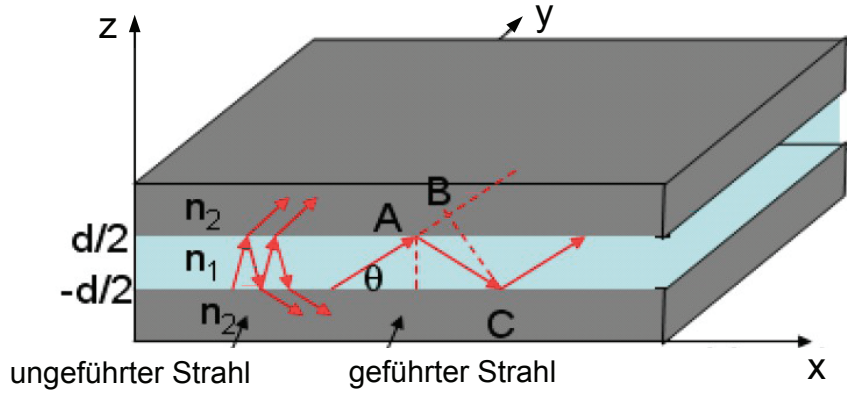


Abbildung 4: Interpretation der Wellenausbreitung im Wellenleiter innerhalb der geometrischen Optik: Der ungeführte Strahl erfährt im Gegensatz zu den geführten Strahlen keine Totalreflexion an der Grenzschicht. In unserem Fall ist $n_2 = 1$ und $n_1 = n = \sqrt{\epsilon_1}$. Der Winkel $\theta = \pi/2 - \alpha$. Er ist durch den Winkel der einfallenden Welle (dargestellt durch den roten Pfeil in Abb. 2) nach dem Snelliusschen Gesetz bestimmt.

erfüllt. Der Eigenwert β entspricht der Ausbreitungskonstante in der x -Richtung. Für $|z| > d/2$ ist die Funktion $a(z)$ in Form

$$a(z) = a_0 e^{ik_{g,z}z} \quad (105)$$

darstellbar, wobei

$$k_{g,z} = \pm \sqrt{k_0^2 - \beta^2}. \quad (106)$$

Wenn β reell ist und $k_0^2 - \beta^2 < 0$, dann muss $k_{g,z}$ rein imaginär sein und die Felder klingen für $|z| \rightarrow \infty$ exponentiell ab. Diese Lösungen sind geführte Moden, die in dem Hauptteil der Aufgabe 2 gefunden wurden. Wenn β reell ist und

$$k_0^2 - \beta^2 > 0, \quad (107)$$

dann ist $k_{g,z}$ rein reell, und die Felder schwingen in solchen Eigenmoden für $|z| > d/2$. Diese Lösungen werden Strahlungsmoden genannt, und können für jeden Wert von $\beta < k_0$ gefunden werden.

Die geführten Moden und die Strahlungsmoden bilden einen vollständigen Satz, so daß jede physikalische Anfangsbedingung $A(z, x = 0)$ als eine Überlagerung dieser Moden dargestellt werden kann. In unserem symmetrischen Fall mit $n(z) = n(-z)$ ist es möglich, die Lösungen der Gleichung (104) so zu wählen, dass sie gerade oder ungerade bezüglich $z \rightarrow -z$ sind. Wir können dann die Anfangsbedingung als

$$A(x = 0, z) = \sum_{l=1}^N \mathcal{A}_l a_l(z) + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dq \mathcal{A}_e(q) a_e(q, z) + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dq \mathcal{A}_o(q) a_o(q, z) \quad (108)$$

schreiben, wobei N die Anzahl der geführten Moden ist. Die Funktionen $a_l(z)$ sind die geführten Moden, $a_e(q, z) = a_e(q, -z)$ die gerade Strahlungsmoden und $a_o(q, z) =$

$-a_o(q, -z)$ die ungerade Strahlungsmoden. Die Moden $a_l(z)$, $a_e(q, z)$, and $a_o(q, z)$ sind alle untereinander orthogonal und können als reell und orthonormal gewählt werden:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz a_l(z) a_m(z) = \delta_{lm}, \quad (109)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz a_e(q, z) a_e(q', z) = \pi \delta(q - q'), \quad (110)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz a_o(q, z) a_o(q', z) = \pi \delta(q - q'). \quad (111)$$

Damit erhalten wir:

$$\mathcal{A}_l = \int_{-\infty}^{\infty} dz A(x=0, z) a_l(z), \quad (112)$$

$$\mathcal{A}_e = \int_{-\infty}^{\infty} dz A(x=0, z) a_e(q, z), \quad (113)$$

$$\mathcal{A}_o = \int_{-\infty}^{\infty} dz A(x=0, z) a_o(q, z). \quad (114)$$

Wir bemerken, dass für $|z| > d/2$ die Moden $a_e(q, z) \propto \cos[qz + \varphi_e(q)]$ und $a_o(q, z) \propto \sin[qz + \varphi_o(q)]$. Im Allgemeinen gilt $\varphi_e(q) \neq \varphi_o(q)$.

Wenn das anfängliche Feld rein aus in x -Richtung vorwärts laufenden Wellen besteht, wie in dem Fall für einen Strahl, der von außen in die Platte injiziert wird (s. Abb. 2), dann können wir die Lösung für alle $x > 0$ als

$$A(x, z) = \sum_{l=1}^N \mathcal{A}_l a_l(z) e^{i\beta_l x} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dq \mathcal{A}(q) a(q, z) e^{i\beta(q)x} \quad (115)$$

schreiben. Hier haben wir

$$\mathcal{A}(q) \equiv \mathcal{A}_e(q) - i\mathcal{A}_o(q), \quad \mathcal{A}(-q) = \mathcal{A}^*(q), \quad (116)$$

$$a(q, z) \equiv a_e(q, z) - ia_o(q, z), \quad a(-q, z) = a^*(q, z), \quad (117)$$

und

$$\beta(q) = \sqrt{k_0^2 - q^2}. \quad (118)$$

eingeführt. Wenn $q^2 > k_0^2$ haben wir $\beta(q) = i\sqrt{q^2 - k_0^2}$, und diese Beiträge zur Lösung fallen exponentiell ab. Die Energie dieser Komponenten wird dann rückwärts reflektiert.

Das Problem des Wellenleiters ist tatsächlich mathematisch verwandt zum quantenmechanischen Problem eines Teilchens in einem Potentialtopf (s. Moderne theoretische Physik I).