Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik III
(Theorie C – Elektrodynamik) WS 12-13

Prof. Dr. Alexander Mirlin
Dr. Igor Gornyi

Blatt 13 Musterlösung
Besprechung 30.01.2013

Aufgabe 1: **Himmel** (4+3=7 Punkte)

Streuung von Licht an einem diffusen Gas kann in einem einfachen Bild wie folgt betrachtet werden:
Die Moleküle des Gases werden vom einfallenden Licht zu Dipolschwingungen angeregt. Die angeregten Dipole strahlen wiederum mit der aus der Vorlesung bekannten Abstrahlungscharakteristik Hertz'scher Dipole Streulicht ab.

(a) Warum ist der Himmel blau?

(b) Warum ist der Sonnenuntergang rot?

Lösung:
Der Effekt beruht auf dem frequenzabhängigen Streuquerschnitt σ der Rayleighstreuung. Um den Streuquerschnitt zu berechnen, stellt man sich ein idealisiertes Oszillatormodell zur Beschreibung der Streuung von Licht an Atomen vor.
Dabei wirkt die einfallende elektromagnetische Welle als Anregung einer gedämpfen harmonischen Schwingung gemäß

$$m\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}+\frac{1}{\tau}\frac{d\vec{r}}{dt}+\omega_0^2\vec{r}\right)=-e(\vec{E}+\frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}). \tag{1}$$

Zu beachten ist der hintere Term der rechten Seite in Gl.(1), welcher die Lorentzkraft berücksichtigt. Unter Verwendung von $\vec{p}=-e\cdot\vec{r}$ und $|\vec{v}|\ll c$, folgt

$$m\left(\frac{d^2\vec{p}}{dt^2}+\frac{1}{\tau}\frac{d\vec{p}}{dt}+\omega_0^2\vec{p}\right)=e^2\vec{E}. \tag{2}$$

Nach einem Einschwingvorgang kommt es zur Schwingung der Elektronen mit der Frequenz des erregenden externen Feldes. Der Ansatz

$$\vec{r}(t)=\vec{r}(\omega)e^{-i\omega\cdot t} \tag{3}$$

führt auf

$$m\left(-\omega^2-\frac{i\omega}{\tau}+\omega_0^2\right)\vec{r}(\omega)=-e\vec{E}(\omega) \tag{4}$$

$$\vec{r}(\omega)=\frac{e}{m}\frac{\vec{E}(\omega)}{\omega^2+i\omega/\tau-\omega_0^2} \tag{5}$$

und somit auf ein induziertes Dipolmoment

$$\vec{p}(t)=\alpha\vec{E}(t)=\vec{p}_0e^{-i\omega\cdot t} \tag{6}$$

mit frequenzabhängiger Polarisierbarkeit

$$\vec{p}_0 = \frac{e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega/\tau} \vec{E}_0. \tag{7}$$

Der einfallende Energiefluss beträgt

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{c \cdot E_0^2}{4\pi}.$$

Wie aus der Vorlesung bekannt, beträgt die Dipolabstrahlung eines Hertz'schen Dipols

$$P = \frac{\omega^4 |\vec{p}|^2}{3 \cdot c^3}.$$

Nun lässt sich der Streuquerschnitt definieren als die gestreute Energie pro Zeiteinheit/einfallender Energiefluß:

$$\sigma = \frac{\frac{c}{3} k^4 p_0^2}{\frac{c}{8\pi} E_0^2} = \frac{8\pi}{3} k^4 \alpha^2 = \frac{4(2\pi)^5 \alpha^2}{3\lambda^4}. \tag{8}$$

Das Lorentz-Oszillatormodell ergibt somit einen frequenzabhänigen Streuquerschnitt. Rotes Licht $\lambda \approx 650$nm besitzt deshalb im Vergleich zu blauem Licht mit $\lambda \approx 470$nm eine größere mittlere freie Weglänge

$$L = \frac{1}{n\sigma}. \tag{9}$$

Die Moleküldichte wird durch n beschrieben. Der Streuprozess in der Atmosphäre ist somit für blaues Licht effektiver als für rotes. Deshalb ist der Himmel blau. Bei zunehmender Distanz der Weglänge durch dichtere Gebiete der Atmosphäre bei Sonnenauf- und untergang, wird das blaue Licht stärker gestreut als das rote, wodurch der Himmel rot erscheint.

Aufgabe 2: **Plasmaoszillationen in Metallen** (5+3=8 Punkte)

Betrachten Sie das Drude-Modell für das Verhalten von Elektronen in Metallen in Wechselwirkung mit dem elektrischen Feld. Mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung und den Maxwell-Gleichungen kann im Grenzfall $\omega\tau \gg 1$ eine Gleichung für die Ladungsdichte gewonnen werden, die eine Bedingung für das Auftreten von Ladungsdichte-Oszillationen, $\rho(\vec{r}, \omega) \neq 0$, liefert.

(a) Bestimmen Sie die Frequenz, für die Ladungsdichte-Oszillationen auftreten können. Vergleichen Sie diese mit der in der Vorlesung eingeführten Plasmafrequenz ω_P.

(b) Leiten Sie aus den Maxwell-Gleichungen die zugehörige Wellengleichung her. Zeigen Sie, dass sich oberhalb der in (a) hergeleiteten Grenzfrequenz im Metall elektromagnetische Wellen ausbilden können.

zu (a):

Das Verhalten von Elektronen in Metallen in Wechselwirkung mit dem elektrischen Feld kann durch eine klassische Bewegungsgleichung

$$\dot{\vec{v}} + \frac{\vec{v}}{\tau} = -\frac{e}{m} \vec{E} \tag{10}$$

beschrieben werden. Dabei bezeichnet m die Elektronenmasse, $-e$ die Elektronenladung. Weiterhin gelten die Maxwell-Gleichungen mit der Stromdichte $\vec{j} = -ne\vec{v}$, wobei n die Elektronendichte bezeichnet. Mit Hilfe des Drude-Modells und der Kontinuitätsgleichung lässt sich unter Verwendung der Maxwell-Gleichungen eine einfache Herleitung der Ladungsträgeroszillationen angeben.

Dazu kann das Lorentz-Oszillatormodell genutzt werden, wobei der Ansatz freier Elektronen durch Streichen des Rückstellterms beschrieben werden kann, $\omega_0 \to 0$:

$$m\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = e\vec{E}. \tag{11}$$

Für $\omega\tau \gg 1$ ergibt sich

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = e\vec{E} \tag{12}$$

$$m\dot{\vec{j}} = ne^2\vec{E} \tag{13}$$

bzw. die Fourier-Transformierte

$$-i\omega m\vec{j} = ne^2\vec{E}. \tag{14}$$

Nutzt man nun die fouriertransformierte Kontinuitätsgleichung und Maxwell-Gleichung

$$i\vec{k}\vec{j} - i\omega\rho = 0 \tag{15}$$

$$\epsilon_{\text{geb}} i\vec{k}\vec{E} = 4\pi\rho. \tag{16}$$

ergibt sich unter Verwendung von (14),(15) und (16) als Bedingung des Auftretens von Ladungsdichteoszillationen

$$\rho(\vec{r},\omega)(\omega^2 m\epsilon_{\text{geb}} - 4\pi e^2 n) = 0. \tag{17}$$

Nach dem Lorentz-Drude Modell können Plasmaoszillationen bei einer Resonanzfrequenz von

$$\omega = \sqrt{\frac{4\pi ne^2}{m\epsilon_{\text{geb}}}} \tag{18}$$

auftreten.

zu (b):

Wenn elektromagnetische Strahlung in ein Medium eindringt, induziert sie ein elektrisches Dipolmoment, es findet eine elektrische Polarisation des Mediums statt. Aus der Polarisation kann auf die dielektrische Funktion geschlossen werden. Zunächst soll jedoch die Wellengleichung im Medium aufgestellt werden.
Für ein isotropes, lineares und homogenes Medium gilt

$$\vec{D}(\vec{r},t) = \epsilon\vec{E}(\vec{r},t), \quad \vec{H}(\vec{r},t) = \frac{\vec{B}(\vec{r},t)}{\mu}. \tag{19}$$

Unter Verwendung von

$$\vec{\nabla}\vec{E} = 0 \tag{20}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{E}) - \Delta\vec{E} \tag{21}$$

folgt

$$-\Delta\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}[\vec{\nabla} \times \vec{B}] = 0. \tag{22}$$

Mit der Maxwell-Relation

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{23}$$

ergibt sich schließlich die gesuchte Wellengleichung

$$\Delta\vec{E} = \frac{\epsilon\mu}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \tag{24}$$

Wie bereits in der ersten Aufgabe gezeigt, ergibt sich mit Hilfe das Lorentz-Modells das erzeugte Dipolmoment

$$\vec{p}_0 = \frac{e^2}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega/\tau}\vec{E}_0. \tag{25}$$

Mit der Elektronendichte n folgt

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_{\text{geb}} + \frac{P(\omega)}{E(\omega)} = \epsilon_{\text{geb}} + \frac{4\pi n p_0(\omega)}{E_0}. \tag{26}$$

Für die dielektrische Funktion ergibt sich schließlich

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_{\text{geb}}\left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega/\tau}\right). \tag{27}$$

mit der Plasmafrequenz

$$\omega_p = \left(\frac{4\pi n e^2}{m\epsilon_{\text{geb}}}\right)^{1/2}.$$

Unter den Annahmen, dass $\omega\tau \gg 1$ und $\omega_0 = 0$ gilt, vereinfacht sich die dieletrische Funktion zu

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_{\text{geb}}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right). \tag{28}$$

Für $\omega \geq \omega_p$ ist der Brechungsindex $n = \sqrt{\epsilon}$ rein reell, elektromagnetische Wellen können sich im Material ausbreiten.

Aufgabe 3: **Skin-Effekt** (5+5=10 Punkte)

Ein zylindrischer Draht (Radius a) bestehe aus einem Metall mit der Leitfähigkeit σ. Durch dieses Metall (parallel zur Zylinderachse) fließe ein elektrischer Wechselstrom (Winkelgeschwindigkeit ω). Gesucht wird das elektrische Feld innerhalb des Leiters, welches sich aus den Maxwell-Gleichungen ergibt. Dabei kann für moderate Frequenzen der Term $\dot{\vec{E}}$ vernachlässigt und $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ angenommen werden (quasistationäre Näherung).

(a) Entkoppeln Sie das System von Differentialgleichungen für $\vec{E}$ und $\vec{B}$. Benutzen Sie dabei das Ohm'sche Gesetz $\vec{j} = \sigma\vec{E}$. Bestimmen Sie $\vec{E}(\vec{r})$ für den Fall $a \gg d$, wobei d die Eindringtiefe (Skindicke) ist.

(b) Berechnen Sie den Widerstand R_{ac} des Drahtes aufgrund des Skin-Effekts. Vergleichen Sie $R_{ac}(\omega)$ mit dem Gleichstromwiderstand ($\omega = 0$).

zu (a):

Für das Ohmsche Gesetz gilt $\vec{j} = \sigma_D \vec{E}$ mit der Drude-Leitfähigkeit σ_D. Diese ist für $\omega\tau \gg 1$ gegeben durch

$$\sigma(\omega) = \frac{ne^2}{m}\frac{1}{1/\tau - i\omega} \underbrace{\rightarrow}_{\omega=0} \frac{ne^2\tau}{m} = \sigma_D \tag{29}$$

Um $\vec{E}(\vec{r})$ zu bestimmen, betrachtet man die fouriertransformierten Maxwell-Gleichungen in Materie unter der Bedingung $\vec{j} = \sigma_D \vec{E}$:

$$i\vec{k} \times \vec{H}(\vec{k},\omega) + \frac{i\omega}{c}\vec{D}(\vec{k},\omega) = \frac{4\pi}{c}\sigma_D \vec{E}(\vec{k},\omega) \tag{30}$$

$$i\vec{k} \times \vec{H}(\vec{k},\omega) + \frac{i\omega}{c}\left(\epsilon - \frac{4\pi\sigma_D}{i\omega}\right)\vec{E}(\vec{k},\omega) = 0 \tag{31}$$

Aufgrund der quasi-stationären Näherung $\omega\tau \ll 1$ dominiert der zweite Term in der Klammer, sodass die Näherung

$$i\vec{k} \times \vec{H}(\vec{k},\omega) = \frac{4\pi}{c}\sigma_D \vec{E}(\vec{k},\omega) \tag{32}$$

gültig ist.

Mit $\mu = 1$ und

$$\vec{\nabla}\vec{B} = 0 \tag{33}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \tag{34}$$

folgt aus

$$\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{k},\omega)] = \frac{4\pi}{c}\sigma_D[\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{k},\omega)] \tag{35}$$

die entkoppelte Gleichung

$$\vec{\nabla}^2\vec{B} - \frac{4\pi\sigma_D}{c^2}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \tag{36}$$

bzw.

$$\vec{\nabla}^2\vec{B} - \frac{4\pi i\sigma_D\omega}{c^2}\vec{B} = 0. \tag{37}$$

Analog folgt

$$\vec{\nabla}^2\vec{E} - \frac{4\pi i\sigma_D\omega}{c^2}\vec{E} = 0. \tag{38}$$

Wir nehmen nun an, dass das elektrische Feld in z-Richtung zeigt (Richtung des Stromes) und aus Symmetriegründen nur vom radialen Abstand ρ abhängt, d.h. $\vec{E} = E(\rho)\hat{e}_z$. Damit vereinfacht sich der Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten zu

$$\Delta\vec{E} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial E(\rho)}{\partial\rho}\right)\hat{e}_z. \tag{39}$$

Mit der Definition $\alpha = \frac{4\pi\sigma_D\omega}{c^2}$ ergibt sich damit die Gleichung

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial E(\rho)}{\partial\rho}\right) - i\alpha E(\rho) = 0, \tag{40}$$

welche sich durch Multiplikation mit ρ^2 auf die Form

$$\rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} E(\rho) + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} E(\rho) - i\alpha \rho^2 E(\rho) = 0 \tag{41}$$

bringen lässt. Mit der Definition $\tilde{\rho} = \sqrt{-i\alpha}\rho$ folgt

$$\tilde{\rho}^2 \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\rho}^2} E(\tilde{\rho}) + \tilde{\rho} \frac{\partial}{\partial \tilde{\rho}} E(\tilde{\rho}) + \tilde{\rho}^2 E(\tilde{\rho}) = 0. \tag{42}$$

Die Lösung dieser Gleichung ist die Besselfunktion $E(\tilde{\rho}) = J_0(\tilde{\rho})$, womit sich dann für das elektrische Feld ergibt

$$\vec{E}(\rho) = A J_0 \left((i-1) \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \rho \right) \hat{e}_z = A J_0((i-1)\sqrt{2\pi\sigma_D \omega / c^2}\rho)\hat{e}_z, \tag{43}$$

wobei A eine komplexe Konstante ist. Wir definieren $d = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma_D\omega}}$ und die Formel für das elektrische Feld vereinfacht sich zu

$$\vec{E}(\rho) = A J_0((i-1)\rho/d)\hat{e}_z. \tag{44}$$

Da eine Besselfunktion mit komplexem Argument sehr große Werte annehmen kann, wollen wir die Konstante A derart wählen, dass das Feld am Rand des Zylinders den Wert E_r besitzt. Wir erhalten also

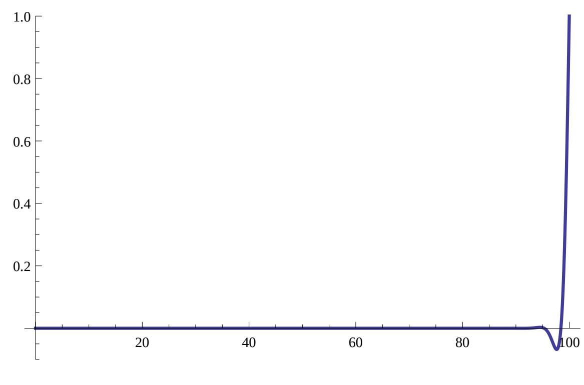
$$E_r \equiv E(a) = A J_0((i-1)a/d) \qquad \Rightarrow \qquad A = \frac{E_r}{J_0((i-1)a/d)}, \tag{45}$$

womit wir das elektrische Feld als

$$\vec{E}(\rho) = E_r \frac{J_0((i-1)\rho/d)}{J_0((i-1)a/d)} \hat{e}_z \tag{46}$$

darstellen können.

In der folgenden Abbildung ist der Realteil des obigen Ausdrucks über ρ von 0 bis a aufgetragen (physikalische Felder sind durch den Realteil gegeben), in den Einheiten $d = 1$, $a = 100$ und $E_r = 1$. Wir sehen, dass das elektrische Feld nur am Rand der Probe eine nennenswerte Amplitude besitzt und dann (mit einer oszillatorischen Überlagerung) sehr schnell auf 0 abfällt.



Die Größe d, die wir oben definiert haben, charakterisiert die Eindringtiefe des Feldes in den Leiter.

zu (b):

Die Widerstandserhöhung aufgrund des Skin-Effekts lässt sich über ein Flächenintegral über die Stromdichte berechnen, die auf Grund des Ohm'schen Gesetzes proportional zum elektrischen Feld ist. Hier sollte man berücksichtigen, dass der Strom eine physikalische Größe ist und damit reell, wir nehmen also den Realteil - dies machen wir jedoch erst am Ende der Rechnung. Der „komplexe“ Strom ist gegeben durch

$$\begin{aligned} I_c &= \int j(\rho) d^2\rho = 2\pi\sigma_D \int_0^a E(\rho)\rho \mathrm{d}\rho & (47) \\ &= 2\pi\sigma_D \frac{E_r}{J_0((i-1)a/d)} \int_0^a \rho J_0((i-1)\rho/d)\mathrm{d}\rho & (48) \end{aligned}$$

gegeben. Mithilfe der Identität $\int uJ_0(u)\mathrm{d}u = uJ_1(u)$, erhält man für das Integral

$$\begin{aligned} I_c &= 2\pi\sigma_D \frac{E_r}{J_0((i-1)a/d)} \frac{d^2}{2} \frac{(-1-i)a}{d} J_1((i-1)a/d) & (49) \\ &= 2\pi\sigma_D \frac{E_r}{J_0((i-1)a/d)} \frac{ad}{2} \sqrt{2} e^{-3\pi i/4} J_1((i-1)a/d) & (50) \\ &= 2\pi\sigma_D \frac{E_r}{J_0((i-1)a/d)} \frac{ad}{\sqrt{2}} e^{-3\pi i/4} J_1((i-1)a/d). & (51) \end{aligned}$$

Der Realteil des Stromes ist nun gegeben durch

$$I = \mathrm{Re}\, I_c = \pi a d \sigma_D E_r \mathrm{Re} \left(\sqrt{2} e^{-3\pi i/4} \frac{J_1((i-1)a/d)}{J_0((i-1)a/d)} \right). \quad (52)$$

Um das Ergebnis noch weiter zu vereinfachen, müssen wir die Besselfunktionen nähern. Dies geschieht hier über eine Formel für die Asymptotik der Besselfunktion,

$$J_n(z) \approx \frac{\exp\left[-i\left(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right]}{\sqrt{2\pi z}}, \quad (53)$$

welche gültig ist, wenn das Argument der Besselfunktion eine konstante komplexe Phase zwischen 0 und π besitzt, was hier der Fall ist ($\arg(i-1) = 3\pi/4$) und der Betrag vom Argument groß ist. ($a/d \gg 1$) Wir erhalten also

$$\begin{aligned} I &\approx \pi a d \sigma_D E_r \mathrm{Re} \left(\sqrt{2} e^{-3\pi i/4} \frac{e^{-i\left((i-1)a/d - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2\pi(i-1)a/d}} \frac{\sqrt{2\pi(i-1)a/d}}{e^{-i\left((i-1)a/d - \frac{\pi}{4}\right)}} \right) \\ &= \pi a d \sigma_D E_r \mathrm{Re} \left(\sqrt{2} e^{-3\pi i/4} e^{i\pi/2} \right) = \pi a d \sigma_D E_r \mathrm{Re} \left(\sqrt{2} e^{-i\pi/4} \right) \\ &= \pi a d \sigma_D E_r. & (54) \end{aligned}$$

Mit dem Ergebnis für den Strom können wir jetzt den Widerstand abschätzen. Nehmen wir an, dass über eine Strecke L die Spannung V abfällt, dann ist das elektrische Feld gegeben durch $E = V/L$. Somit können wir $E_r = V/L$ einsetzen (wir nehmen an, dass die Spannung durch den Maximalwert des elektrischen Feldes gegeben ist) und erhalten

$$I = \pi a d \sigma_D \frac{V}{L}. \quad (55)$$

Nun können wir den Widerstand einfach ablesen, er ist gegeben durch

$$R_{ac} = \frac{V}{I} = \frac{L}{\pi a d \sigma_D} = \frac{L\rho_s}{\pi a d}, \quad (56)$$

wobei $\rho_s = 1/\sigma_D$ der spezifische Widerstand des Materials ist. Vergleichen wir dies nun mit dem Gleichstromwiderstand des Systems, welcher einfach gegeben ist durch (A ist die Fläche des Leiters)

$$R_{dc} = \frac{L\rho_s}{A} = \frac{L\rho_s}{\pi a^2}, \tag{57}$$

so erhalten wir für die Überhöhung des Wechselstromwiderstandes

$$\frac{R_{ac}}{R_{dc}} = \frac{a}{d} \gg 1. \tag{58}$$

Bonusaufgabe **Einachsiges Medium** (5+5=10 Bonuspunkte)

Wir betrachten ein anisotropes Medium, in dem die Dielektrizitätskonstante richtungsabhängig ist: $D_i = \epsilon_i E_i$ mit $\epsilon_x = \epsilon_y \neq \epsilon_z$.

(a) Bestimmen Sie die Dispersionsrelation $\omega = \omega(\vec{k})$ für das elektrische Feld einer ebenen elektromagnetischen Welle mit Frequenz ω und Wellenvektor $\vec{k}$ (der eine beliebige Richtung haben kann).

(b) Finden Sie die Phasengeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Richtung des Wellenvektors.

zu (a): Elektromagnetische Wellen in anisotropen Medien.

In dieser Aufgabe wird ein nichtmagnetisches Medium ohne freie Ladungen betrachtet. Das Medium sei anisotrop. Zur Ableitung der Dispersionsrelation stellt man zunächst die Wellengleichung in einem anisotropen, unmagnetischen Medium auf. Mit Hilfe von

$$\vec{k} \cdot \vec{D} = 0 \tag{59}$$
$$\vec{k} \cdot \vec{H} = 0 \tag{60}$$
$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega\mu_0\vec{H} \tag{61}$$
$$\vec{k} \times \vec{H} = -\omega\vec{D} \tag{62}$$

folgt aus (61) und (62)

$$-[\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E})] = \frac{\omega^2}{c^2\epsilon_0}\vec{D}, \tag{63}$$
$$-\vec{k}(\vec{k}\vec{E}) + \vec{k}^2\vec{E} = \frac{\omega^2}{c^2\epsilon_0}\vec{D} \tag{64}$$

mit

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad \sum_i u_i^2 = 1.$$

Im Hauptachsensystem, indem

$$D_i = \epsilon_0\epsilon_i E_i \tag{65}$$

gilt, resultiert die Wellengleichung

$$-k_i \sum_j k_j E_j + k^2 E_i = \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_i E_i, \tag{66}$$

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_i - k^2\right) E_i = -k_i \sum_j k_j E_j. \tag{67}$$

Für ein isotropes Medium stünde auf der rechten Seite der Gleichung eine Null. Auflösen nach E_i, Multiplikation mit der Komponente k_i und Summation über die Indizes ergibt schließlich die Dispersionsrelation:

$$E_i = -\frac{c^2 k_i}{\epsilon_i \omega^2 - c^2 k^2} \sum_j k_j E_j, \tag{68}$$

$$\sum_j k_j E_j = -\sum_i \frac{c^2 k_i^2}{\epsilon_i \omega^2 - c^2 k^2} \sum_j k_j E_j, \tag{69}$$

$$1 = \sum_i \frac{c^2 k_i^2}{c^2 k^2 - \epsilon_i \omega^2}\,. \tag{70}$$

Dies lässt sich darstellen als

$$\sum_i \frac{c^2 k^2 u_i^2}{c^2 k^2 - \omega^2 \epsilon_i} = 1. \tag{71}$$

Um diese Gleichung nun explizit nach ω aufzulösen, ist es oftmals besser, mit Gleichung (67) weiterzurechnen. Diese können wir umstellen zu

$$\sum_j \left[\left(\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_i - k^2\right)\delta_{ij} + k_i k_j\right] E_j = 0, \tag{72}$$

womit sich das ganze als Matrixgleichung interpretieren lässt, d.h.

$$\underline{\underline{M}}\vec{E} = 0 \qquad \left(\underline{\underline{M}}\right)_{ij} = \left(\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_i - k^2\right)\delta_{ij} + k_i k_j. \tag{73}$$

Ausgeschrieben hat die Matrix die Form

$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} -k_2^2 - k_3^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_1 & k_1 k_2 & k_1 k_3 \\ k_1 k_2 & -k_1^2 - k_3^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_2 & k_2 k_3 \\ k_1 k_3 & k_2 k_3 & -k_1^2 - k_2^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_3 \end{pmatrix}. \tag{74}$$

Damit Gleichung (73) erfüllbar ist, muss die Determinante der Matrix gleich 0 sein. Setzen wir $\epsilon_1 = \epsilon_2$ (damit vereinfachen sich die Formeln um einiges) und berechnen die Determinante, der Matrix aus Gl. (74), so erhalten wir

$$c^6 \det \underline{\underline{M}} = \omega^2 \left(c^2 k^2 - \omega^2 \epsilon_1\right)\left(c^2 (k_1^2 + k_2^2)\epsilon_1 + (c^2 k_3^2 - \omega^2 \epsilon_1)\epsilon_3\right) \equiv 0. \tag{75}$$

Die Determinante verschwindet in drei Möglichen fällen:

- $\omega = 0$
  Der triviale statische Fall, in dem keine Wellenausbreitung stattfindet.
- $\omega^2 = \frac{1}{\epsilon_1} c^2 k^2$
  Die Welle ist ausschließlich in z-Richtung polarisiert, wodurch sich durch die Maxwellgleichungen und der Tatsache, dass ϵ diagonal ist, ergibt, dass k ausschließlich in der x, y-Ebene liegt. Da die Ausbreitungsrichtung die verschiedenen ϵ nie vermischt, bleibt der Ausdruck für die Dispersion trivial, $\omega = \frac{c}{n_1}|k|$

- $\omega^2 = \frac{c^2}{\epsilon_1\epsilon_3}\left((k_1^2+k_2^2)\epsilon_1 + k_3^2\epsilon_3\right)$
  Dies ist der neue Fall, wenn die Ausbreitungsrichtung der Welle eine Komponente in z-Richtung hat bzw. die Welle zumindest teilweise in x, y-Richtung polarisiert ist. In diesem Fall ist die Dispersion gegeben durch $\omega = \frac{c}{n_1 n_3}\sqrt{\epsilon_1 k_\parallel^2 + \epsilon_3 k_3^2}$, wobei $k_\parallel^2 = k_1^2 + k_2^2$ die Komponente von $\vec{k}$ ist, die in der x, y-Ebene liegt.

zu (b):

Im Falle von optisch einachsigen Kristallen sind die Phasengeschwindigkeiten des ordentlichen und außerordentlichen Strahls für aufeinander senkrecht Polarisationsrichtungen linear polarisierten Lichts verschieden. Mit

$$\epsilon_r = \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix} \tag{76}$$

mit $\epsilon_x = \epsilon_y \neq \epsilon_z$ folgt für eine linear polarisierte Welle der Form

$$\vec{k} = k \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\Theta \\ \cos\Theta \end{pmatrix} \tag{77}$$

mit Gleichung (70), für die Phasengeschwindigkeit

$$\vec{v}_{ph} = \sin\Theta \frac{c}{\sqrt{\epsilon_z}}\vec{e}_y + \cos\Theta \frac{c}{\sqrt{\epsilon_y}}\vec{e}_z. \tag{78}$$

Anhang **Bemerkungen zu Aufgabe 3 (Skin-Effekt)**

Zusätzlich zur formalen Lösung über die Besselfunktionen werden wir im folgenden noch einige Näherungen diskutieren.

Approximation 1: Asymptotik der Besselfunktion verwenden

Anhand des Plots der Besselfunktion ist es einleuchtend, dass wir annehmen können, das Argument ρ/d der Besselfunktion, die das elektrische Feld löst, sei dort groß, wo das Feld nennenswert von 0 verschieden ist. Mit der gegebenen Näherungsformel aus Gl. (53) finden wir also folgenden Ausdruck für das elektrische Feld in der Nähe des Randes:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\rho) &\approx E_r \frac{e^{i\pi/4}e^{i\rho/d}e^{\rho/d}}{\sqrt{2\pi\rho/d(i-1)}} \frac{\sqrt{2\pi a/d(i-1)}}{e^{i\pi/4}e^{ia/d}e^{a/d}}\hat{e}_z \\ &= E_r\sqrt{\frac{a}{\rho}}e^{i(\rho-a)/d}e^{(\rho-a)/d}\hat{e}_z. \end{aligned} \tag{79}$$

Hier sieht man explizit, dass das elektrische Feld am Rand des Leiters exponentiell abfällt mit einer Eindringtiefe d. Würde man diese Funktion im gleichen Diagramm plotten, wie die Bessel-Lösung, so würde man für große ρ (z.B. $\rho > a/2 \gg d$) keinen Unterschied mehr sehen.

Wir können nun den Ausdruck aus Gl. (54) für den Gesamtstrom mit diesem genäherten Feld herleiten. Setzen wir das genäherte Feld aus Gl. (79) in Gl. (47) ein, ergibt sich

$$I_c = 2\pi\sigma_D E_r e^{-(i+1)a/d}\sqrt{a}\int_0^a \sqrt{\rho}e^{(i+1)\rho/d}\mathrm{d}\rho. \tag{80}$$

Die Wurzel im Integral können wir entwickeln um den Punkt $\rho = a$ (weil die Funktion ihr größtes Gewicht an diesem Punkt hat) und erhalten die Reihe

$$\sqrt{\rho} = \sqrt{a} + \frac{\rho - a}{2\sqrt{a}} - \mathcal{O}\left((\rho - a)^2\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a} + \frac{\rho}{\sqrt{a}}\right) - \mathcal{O}\left((\rho - a)^2\right). \tag{81}$$

Unter Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung ergibt sich somit für das Integral

$$\begin{aligned} I_c &\approx \pi\sigma_D E_r e^{-(i+1)a/d} a \int_0^a \left(1 + \frac{\rho}{a}\right) e^{(i+1)\rho/d} \mathrm{d}\rho & (82) \\ &= \pi\sigma_D E_r e^{-\kappa a} a \int_0^a \left(1 + \frac{\rho}{a}\right) e^{\kappa\rho} \mathrm{d}\rho & (83) \\ &= \pi\sigma_D E_r e^{-\kappa a} ad \frac{1-i}{2}\left[2e^{\kappa a} - 1 + \frac{d}{a}\frac{1-i}{2}\left(1 - e^{\kappa a}\right)\right] & (84) \\ &= \pi ad\sigma_D E_r (1-i)\left[1 - \frac{e^{-a/d}e^{-ia/d}}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{d}{a}\right)\right]. & (85) \end{aligned}$$

Der Ausdruck $e^{-a/d}$ ist sehr klein gegenüber 1 und kann ebenfalls vernachlässigt werden, weswegen

$$I_c \approx \pi ad\sigma_D E_r (1 - i), \tag{86}$$

und damit erhalten wir das bekannte Ergebnis

$$I = \mathrm{Re}\, I_c \approx \pi ad\sigma_D E_r. \tag{87}$$

Approximation 2: Laplaceoperator nähern

Alternativ zu der Lösung über die Besselfunktionen kann man eine Lösung für das Feld ohne Besselfunktionen herleiten, indem man den Laplaceoperator nähert. Wenn wir davon ausgehen, dass der Zylinderradius viel größer ist als die Eindringtiefe des Feldes d, dann ist die Krümmung der Zylinderoberlfche vernachlässigbar. Wir können also annehmen, dass der Abstand vom Zentrum des Zylinders einfach durch die Raumrichtung x gegeben ist und können so die Gleichung (38) weiter nähern und erhalten

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\vec{E}(x) - i\alpha\vec{E}(x) = 0. \tag{88}$$

Mit dem Ansatz $E(x) = e^{\kappa x}$ erhalten wir

$$(\kappa^2 - i\alpha)\vec{E}(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \kappa = \sqrt{i\alpha} = (i+1)\sqrt{\frac{\alpha}{2}} = (i+1)/d, \tag{89}$$

und somit für das elektrische Feld

$$\vec{E}(x) = A_2 e^{(i+1)x/d}\hat{e}_z. \tag{90}$$

Legen wir hier nun A_2 wieder durch $E(a) \equiv E_r$ fest, dann erhalten wir $A_2 = E_r e^{-(i+1)a/d}$ und somit

$$\vec{E}(x) = E_r e^{i(x-a)/d} e^{(x-a)/d}\hat{e}_z. \tag{91}$$

Auch hier sieht man einem Plot für große x den Unterschied zu den anderen beiden Kurven nicht an.

Nutzen wir nun nicht das volle elektrische Feld, sondern eine der Näherungen, können wir den obigen Ausdruck (Gl. (54)) ebenfalls herleiten. Setzen wir die simple Approximation aus Gleichung (91) in die allgemeine Formel (47) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} I_c &= 2\pi\sigma_D E_r e^{-(i+1)a/d} \int_0^a \rho e^{(i+1)\rho/d} \mathrm{d}\rho = 2\pi\sigma_D E_r e^{-\kappa a} \int_0^a \rho e^{\kappa\rho} \mathrm{d}\rho && (92) \\ &= 2\pi\sigma_D E_r e^{-\kappa a} \frac{1}{\kappa^2} \int_0^{\kappa a} u e^u \mathrm{d}u = 2\pi\sigma_D E_r e^{-\kappa a} \frac{1}{\kappa^2} \left[\kappa a e^{\kappa a} - (e^{\kappa a} - 1)\right] && (93) \\ &= 2\pi\sigma_D E_r e^{-\kappa a} \left[\frac{a}{\kappa} e^{\kappa a} - \frac{1}{\kappa^2}(e^{\kappa a} - 1)\right] && (94) \\ &= 2\pi\sigma_D E_r e^{-\kappa a} \left[\frac{ad}{i+1} e^{\kappa a} + \frac{d^2}{2i}(e^{\kappa a} - 1)\right] && (95) \\ &= \pi a d \sigma_D E_r \left[(1-i) + \frac{d}{a} i (e^{-\kappa a} - 1)\right] = \pi a d \sigma_D E_r \left[(1-i) + \mathcal{O}\left(\frac{d}{a}\right)\right]. && (96) \end{aligned}$$

Nehmen wir hier wieder den Realteil und vernachlässigen den zweiten Term (der durch $\frac{d}{a} \ll 1$ klein ist), so erhalten wir

$$I = \mathrm{Re}\, I_c \approx \pi a d \sigma_D E_r, \tag{97}$$

welches wiederum das bekannte Ergebnis ist.

Approximation 3: Anschauliche Motivation des Wechselstromwiderstandes

Es soll zudem noch darauf hingewiesen werden, dass das Ergebnis für den Wechselstromwiderstand auch anschaulich motiviert werden kann: Wir gehen davon aus, dass der Strom nur eine gewisse Eindringtiefe d hat und am Rand des Leiters seinen Maximalwert erreicht. Damit ist die Fläche, die effektiv zum Stromtransport beiträgt, näherungsweise gegeben durch $d \cdot 2\pi a$. Wenn wir davon ausgehen, dass das elektrische Feld im Mittel entlang dieser Fläche (es nimmt ja nach innen hin ab) den Wert $\frac{E_r}{2}$ besitzt, (der Widerstand also doppelt so groß ist, als wenn man ein konstantes Feld mit dem Wert E_r annimmt) so ergibt sich für den Wechselstromwiderstand

$$R_{ac} = 2\frac{L\rho_s}{A_{ac}} = \frac{L\rho_s}{\pi a d}. \tag{98}$$

Diese anschauliche Betrachtung hilft allerdings nicht bei der Bestimmung von d, die Eindringtiefe muss in jedem Fall explizit hergeleitet werden.