

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik III
(Theorie C – Elektrodynamik) WS 12-13**Prof. Dr. Alexander Mirlin**
Dr. Igor Gornyi**Blatt 14**
Besprechung 06.02.2013**Aufgabe 1: Eigenschaften der Lorentz-Transformationen** (3+3+4=10 Punkte)Eine Lorentztransformation $(x, t) \xrightarrow{\beta} (x', t')$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(x - \beta ct) \\ ct' &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(ct - \beta x) \end{aligned} \quad (1)$$

mit $\beta = v/c$.

(a) Zeigen Sie explizit, dass die sukzessive Anwendung zweier Lorentztransformationen

$$(x, t) \xrightarrow{\beta_1} (x', t') \xrightarrow{\beta_2} (x'', t'')$$

wieder als Lorentztransformation geschrieben werden kann

$$(x, t) \xrightarrow{\beta_{1+2}} (x'', t'')$$

Was ergibt sich für β_{1+2} ?**Lösung:**Die erste Lorentztransformation $(x, t) \xrightarrow{\beta_1} (x', t')$ liefert:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta_1^2}}(x - \beta_1 ct) \\ ct' &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta_1^2}}(ct - \beta_1 x) \end{aligned} \quad (2)$$

Die Anwendung der zweiten Lorentztransformation $(x', t') \xrightarrow{\beta_2} (x'', t'')$ ergibt:

$$\begin{aligned} x'' &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta_2^2}}(x' - \beta_2 ct') \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta_2^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta_1^2}}(x - \beta_1 ct) - \beta_2 \frac{1}{\sqrt{1-\beta_1^2}}(ct - \beta_1 x) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1-\beta_2^2)(1-\beta_1^2)}} ((1 + \beta_1\beta_2)x - (\beta_1 + \beta_2)ct) \\ &= \frac{1 + \beta_1\beta_2}{\sqrt{(1-\beta_2^2)(1-\beta_1^2)}} \left(x - \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2} ct \right) \\ \text{analog : } ct'' &= \frac{1 + \beta_1\beta_2}{\sqrt{(1-\beta_2^2)(1-\beta_1^2)}} \left(ct - \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2} x \right) \end{aligned}$$

Somit kommt nur $\beta_{1+2} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}$ in Frage und es bleibt zu prüfen, ob der Vorfaktor dazu passt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_{1+2}^2}} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}\right)^2}} \\ &= \frac{1 + \beta_1 \beta_2}{\sqrt{(1 + \beta_1 \beta_2)^2 - (\beta_1 + \beta_2)^2}} \\ &= \frac{1 + \beta_1 \beta_2}{\sqrt{1 + 2\beta_1 \beta_2 + \beta_1^2 \beta_2^2 - (\beta_1^2 + \beta_2^2 + 2\beta_1 \beta_2)}} \\ &= \frac{1 + \beta_1 \beta_2}{\sqrt{(1 - \beta_1^2)(1 - \beta_2^2)}} \end{aligned}$$

Was exakt dem Vorfaktor der sukzessiven Lorentztransformationen entspricht.

- (b) Die Lorentztransformation (1) kann alternativ auch in folgender Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned} x' &= \cosh \gamma x - \sinh \gamma ct \\ ct' &= \cosh \gamma ct - \sinh \gamma x \end{aligned} \quad (3)$$

Berechnen Sie die Rapidität γ_{1+2} aus β .

Lösung:

Der Vergleich mit (1) liefert:

$$\begin{aligned} \cosh \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ \sinh \gamma &= \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned}$$

Daraus folgt der Zusammenhang zwischen β und der Rapidität:

$$\begin{aligned} \tanh \gamma &= \beta \\ \gamma &= \operatorname{artanh} \beta \end{aligned}$$

Da (1) und (3) symmetrisch unter der Vertauschung ($x \leftrightarrow ct$, $x' \leftrightarrow ct'$) sind, genügt es, nur die sukzessive Transformation nach x'' zu zeigen:

$$\begin{aligned} x' &\stackrel{\gamma_1}{=} \cosh \gamma_1 x - \sinh \gamma_1 ct \\ ct' &\stackrel{\gamma_1}{=} \cosh \gamma_1 ct - \sinh \gamma_1 x \\ x'' &\stackrel{\gamma_2}{=} \cosh \gamma_2 x' - \sinh \gamma_2 ct' \\ &= \cosh \gamma_2 (\cosh \gamma_1 x - \sinh \gamma_1 ct) - \sinh \gamma_2 (\cosh \gamma_1 ct - \sinh \gamma_1 x) \\ &= \cosh (\gamma_1 + \gamma_2) x - \sinh (\gamma_1 + \gamma_2) ct \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \gamma_{1+2} &= \gamma_1 + \gamma_2 \\ &= \operatorname{artanh} \beta_1 + \operatorname{artanh} \beta_2 \\ &= \operatorname{artanh} \left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2} \right) \\ &= \operatorname{artanh} \beta_{1+2} \end{aligned}$$

- (c) Zeigen Sie explizit, dass die Wellengleichung invariant unter Lorentztransformationen (1) ist,

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) \Psi(\vec{r}, t) = 0 \quad \xrightarrow{\beta} \quad \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \nabla'^2\right) \Psi(\vec{r}', t') = 0 . \quad (4)$$

Lösung:

Im folgenden gilt: $\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

Zur Transformation der partiellen Ableitungen benötigen wir die Formeln für die Rücktransformation, die sich leicht aus (1) herleiten lassen:

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + \beta ct') \\ t &= \frac{\gamma}{c}(ct' + \beta x') \end{aligned} \quad (5)$$

Die partiellen Ableitungen der Rücktransformierten (5) lauten:

$$\frac{\partial x}{\partial x'} = \gamma \quad \frac{\partial x}{\partial t'} = \gamma\beta c \quad \frac{\partial t}{\partial x'} = \frac{\gamma\beta}{c} \quad \frac{\partial t}{\partial t'} = \gamma \quad (6)$$

Betrachten wir nun die Differentialoperatoren (Kettenregel):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'} &= \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial^2}{\partial x'^2} &= \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial t} \right) \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial x'} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial t}{\partial x'} \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + \left(\frac{\partial t}{\partial x'} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \\ &\stackrel{(6)}{=} \gamma^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2 \frac{v}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + \frac{v^2}{c^4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \\ &= \gamma^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2 \frac{\beta}{c} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + \frac{\beta^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

analog dazu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t'} &= \frac{\partial x}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial^2}{\partial t'^2} &= \gamma^2 \left(\beta^2 c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\beta c \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

Der transformierte D'Alembertoperator lautet somit:

$$\begin{aligned} \square' &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \\ &= \gamma^2 \left(\beta^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2 \frac{\beta}{c} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2 \frac{\beta}{c} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} - \frac{\beta^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \\ &= \gamma^2 \left(\frac{1}{c^2} (1 - \beta^2) \frac{\partial^2}{\partial t^2} - (1 - \beta^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ &= \square \end{aligned} \quad (9)$$

Aufgabe 2: Myon

(7 Punkte)

Ruhende Myonen haben eine Lebensdauer von $\tau_\mu = 2.2 \times 10^{-6} \text{ s}$. In der Atmosphäre werden durch hochenergetische Teilchenkollisionen eine große Anzahl von Myonen erzeugt. Nehmen Sie an, dass die Geschwindigkeit der Myonen nach der Erzeugung $v = 0.9c$ beträgt.

Wie weit kann ein solches Muon fliegen, bevor es zerfällt?

Lösung:

Myon und Erde werden als Inertialsysteme betrachtet. Gesucht ist die Strecke im Inertialsystem Erde, die das Myon nach der mittleren Lebensdauer in Eigenzeit zurückgelegt hat.

Das Myon ruht (räumlich) im Eigensystem und befindet sich zum Erzeugungszeitpunkt an $(x_0 = 0, t_0 = 0)$, zum Zerfallszeitpunkt an $(x_1 = 0, t_1 = \tau_\mu)$.

Die im Erdsystem zurückgelegte Strecke ist (1):

$$s = x'_1 - x'_0 = \gamma \beta c \tau_\mu = \frac{\beta c}{\sqrt{1 - \beta^2}} \tau_\mu \approx 1362.73 \text{ m}$$

Aufgabe 3: Zwillingss-Paradoxon

(5+3=8 Punkte)

Ein Raumschiff startet von der Erde aus zu einem kurzen Abstecher zu einem Gedichteabend auf der vogonischen Heimatwelt. Um die Reise für die Insassen so angenehm wie möglich zu gestalten, wird das Raumschiff jeweils auf gerader Linie mit $1g$ beschleunigt bzw. abgebremst. Eine Beschleunigungs- bzw. Bremsphase dauert jeweils 5 Jahre (Bordzeit). Nach einem Abend voller Kultur dreht das Raumschiff wieder um und fliegt auf dem gleichen Weg zurück, den es gekommen ist.

Bob hat schon viel von der vogonischen Dichtkunst gehört und hat sich ein Ticket gekauft. Seine Zwillingsschwester Alice verabschiedet sich am Raumflughafen von ihm. Bob tröstet sie mit den Worten: "Mach dir keine Sorgen, in 20 Jahren bin ich schon wieder zurück!"

- (a) Nachdem sie nach Hause zurückgekehrt ist, wird Alice stutzig. Wird Bob wirklich nur 20 Jahre unterwegs sein? Rechnen Sie nach, wie viel Zeit auf der (ruhenden) Erde bis zur Rückkehr des Raumschiffs vergangen sein wird. Erlebt Alice die Rückkehr ihres Zwillingss noch?

Verwenden Sie dabei, dass im ruhenden System der Erde für die Änderung der Geschwindigkeit des Raumschiffs

$$d\beta = \frac{g}{c} (1 - \beta^2) d\tau = \frac{g}{c} (1 - \beta^2)^{3/2} dt \quad (10)$$

gilt.

Lösung:

Das Problem ist symmetrisch, d.h. in jeder Beschleunigungs- und Abbremsungsphase vergeht die gleiche Zeit und die gleiche Strecke wird zurückgelegt.

Gesucht ist der Zusammenhang zwischen t und τ . Aus (10) lassen sich paarweise drei Differentialgleichungen ablesen, die aber alle von β abhängen, weswegen nicht

direkt $d\tau = (1 - \beta^2)^{1/2} dt$ gelöst werden kann. Stattdessen werden die anderen beiden gelöst und kombiniert:

$$d\beta = \frac{g}{c} (1 - \beta^2) d\tau$$

$$\frac{d\beta}{1 - \beta^2} = \frac{g}{c} d\tau$$

Integration ergibt:

$$\operatorname{artanh} \beta = \frac{g}{c} \tau + C$$

Durch die Bedingung $\beta(\tau = 0) = 0$ folgt $C = 0$ und damit:

$$\beta(\tau) = \tanh \frac{g}{c} \tau \quad (11)$$

Analog dazu:

$$d\beta = \frac{g}{c} (1 - \beta^2)^{\frac{3}{2}} dt$$

$$(1 - \beta^2)^{-\frac{3}{2}} d\beta = \frac{g}{c} dt$$

$$\int (1 - \beta^2)^{-\frac{3}{2}} d\beta = \frac{g}{c} \int dt \beta (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{g}{c} t + C$$

Da die Startzeitpunkte gleich sind, folgt auch hier $C = 0$ und damit:

$$t(\beta) = \frac{c}{g} \beta (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (12)$$

Setzt man (11) in (12) ein, erhält man (nach Umformungen der Hyperbel- und Areafunktionen) die Erdzeit in Abhängigkeit von der Schiffszeit:

$$t(\tau) = \frac{c}{g} \sinh \frac{g}{c} \tau \quad (13)$$

Die Gesamtdauer des Ausflugs beträgt dann mit $T = 5 \text{ y}$ und $g = 9.81 \text{ m/s}^2$:

$$t' = 4t(\tau = T) = 4 \frac{c}{g} \sinh \frac{g}{c} T$$

$$\approx 11.502.473.220 \text{ s} \quad (14)$$

$$= 336 \text{ y}$$

Alice muss also selbst auf Reisen gehen, um ihren Bruder wieder zu sehen und ihm Nachhilfe in Physik zu geben.

- (b) Wie weit ist der Heimatplanet der Vogonen von der Erde entfernt?

Lösung:

$$L = 2 \int_0^{t(\tau=T)} v(t) dt = 2 \int_0^{t(\tau=T)} c \beta(\tau(t)) dt. \quad (15)$$

Bestimmen wir zunächst $\beta(t)$, indem wir (13) nach τ auflösen und in (11) einsetzen:

$$\beta(t) = \frac{\frac{g}{c} t}{\sqrt{1 + \frac{g^2 t^2}{c^2}}}.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
 L &= 2 \int_0^{t(\tau=T)} \frac{gt}{\sqrt{1 + \frac{g^2 t^2}{c^2}}} dt \\
 &= 2 \frac{c^2}{g} \left[\sqrt{1 + \frac{g^2 t^2}{c^2}} \right]_0^{t(\tau=T)} \\
 &= 2 \frac{c^2}{g} \left(\sqrt{1 + \sinh^2 \left(\frac{gT}{c} \right)} - 1 \right) \\
 &\approx 1.57 \text{ Em} \approx 166.3 \text{ ly}
 \end{aligned} \tag{16}$$

Bonusaufgabe

(5 Bonuspunkte)

Leiten Sie Gl. (10) her.

Lösung:

Die Erde wird als Inertialsystem S betrachtet. Das Raumschiff selbst bildet kein Inertialsystem. Betrachtet man jedoch einen beliebigen Punkt der Reise mit Eigenzeit τ , gibt es ein Inertialsystem, in dem sich das Raumschiff in Ruhe in $(x = 0)$ befindet. Es wird hier als S' bezeichnet. Die Geschwindigkeit des Raumschiffes in diesem System sei u' , die Geschwindigkeit von S' relativ zur S sei gleich der Geschwindigkeit des Raumschiffs in S : u .

Betrachten wir die Geschwindigkeitsänderung in S' :

$$du' = u'(\tau + d\tau) - u'(\tau) = g d\tau$$

Mittels relativistischer Geschwindigkeitsaddition

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{vu'}{c^2}}$$

wird

$$du = u(\tau + d\tau) - u(\tau)$$

berechnet:

$$\begin{aligned}
 u(\tau + d\tau) &= \frac{u + du'}{1 + \frac{u du'}{c^2}} \\
 du &= \frac{u + du'}{1 + \frac{u du'}{c^2}} - u \\
 &= \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \frac{du'}{1 + \frac{u du'}{c^2}} \\
 &\approx (1 - \beta^2) du' = (1 - \beta^2) g d\tau
 \end{aligned}$$

woraus folgt:

$$d\beta = \frac{g}{c} (1 - \beta^2) d\tau$$

Mit $d\tau = \sqrt{1 - \beta^2} dt$ folgt daraus direkt:

$$d\beta = \frac{g}{c} (1 - \beta^2)^{\frac{3}{2}} dt$$