

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik III

(Theorie C – Elektrodynamik) WS 12-13

Prof. Dr. Alexander Mirlin
Dr. Igor Gornyi

Blatt 15
08.02.2013–14.02.2013

Aufgabe 1: **Stab**

Im Inertialsystem K befinde sich ein ruhender Stab der Länge L . Die Länge ergibt sich aus der Koordinatendifferenz der Endpunkte des Stabs zur selben Zeit. Der Stab ist in x -Richtung ausgerichtet.

- (a) *Welche Länge misst man für den Stab im System K' das sich von K aus gesehen mit einer Geschwindigkeit v entlang der x -Achse in positiver Richtung bewegt?*

Die Länge wird durch die Differenz der zur gleichen Zeit gemessenen Koordinaten der Endpunkte des Stabes bestimmt. Im System K hat der Stab die Länge $L = (x_b - x_a)|_{t_b=t_a}$. Im System K' hat der Stab die Länge $L' = (x'_b - x'_a)|_{t'_b=t'_a}$, wobei sich der Stab in K' mit der Geschwindigkeit $-v$ bewegt. Geht man vom System K zu K' erhält man mit

$$\begin{aligned}x'_i &= \gamma (x_i - vt_i), \\t'_i &= \gamma \left(t_i - \frac{v}{c^2} x_i \right)\end{aligned}$$

und $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ und $\beta = \frac{v}{c}$:

$$x'_b - x'_a = \gamma (x_b - x_a) - \gamma v (t_b - t_a), \quad (1)$$

$$t'_b - t'_a = \gamma (t_b - t_a) - \gamma \frac{v}{c^2} (x_b - x_a). \quad (2)$$

Löst man Gleichung (2) nach $(t_b - t_a)$ auf

$$t_b - t_a = \frac{1}{\gamma} (t'_b - t'_a) + \frac{v}{c^2} (x_b - x_a) \quad (3)$$

und setzt dies in Gleichung (1) ein, erhält man

$$x'_b - x'_a = \frac{1}{\gamma} (x_b - x_a) - v (t'_b - t'_a). \quad (4)$$

Also ist die Länge im System K'

$$L' = (x'_b - x'_a)|_{t'_b=t'_a} = \frac{1}{\gamma} L = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} L. \quad (5)$$

Der Stab erscheint im System K' demnach kürzer. Dies ist eine Folge der unterschiedlichen Definitionen der Gleichzeitigkeit in den beiden Systemen.

- (b) Der Stab (wieder in x -Richtung ausgerichtet) bewegt sich nun mit Geschwindigkeit u in y -Richtung. Bestimmen Sie seinen Winkel θ zur x -Richtung bezüglich K' .

Der gesuchte Winkel θ gibt den Winkel des Stabes zur x' -Achse an:

$$\tan \theta = \frac{y'_b - y'_a}{x'_b - x'_a} \Big|_{t'_b=t'_a} \quad (6)$$

$x'_b - x'_a$ ist analog wie in Teilaufgabe (a):

$$x'_b - x'_a = \frac{1}{\gamma} (x_b - x_a) - v (t'_b - t'_a). \quad (7)$$

$y'_b - y'_a$ erhält man über

$$y'_b - y'_a = y_b - y_a = u (t_b - t_a). \quad (8)$$

Ersetzt man wieder $(t_b - t_a)$ durch Gleichung (3) erhält man

$$y'_b - y'_a = y_b - y_a = u \left(\frac{1}{\gamma} (t'_b - t'_a) + \frac{v}{c^2} (x_b - x_a) \right) \quad (9)$$

und damit

$$\tan \theta = \frac{y'_b - y'_a}{x'_b - x'_a} \Big|_{t'_b=t'_a} = \frac{\frac{uv}{c^2} (x_b - x_a)}{\frac{1}{\gamma} (x_b - x_a)} = \gamma \frac{uv}{c^2}. \quad (10)$$

Außerdem ändert sich auch der Winkel der Geschwindigkeit θ_u . Der Stab bewegt sich im System K mit der Geschwindigkeit $\vec{u} = (0, u, 0)^T$. Die Geschwindigkeiten im System K' erhält man über die relativistische Geschwindigkeitsaddition:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x \cdot v}{c^2}} = -v, \quad (11)$$

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma \left(1 - \frac{u_x \cdot v}{c^2}\right)} = \frac{u}{\gamma}. \quad (12)$$

Der Winkel θ_u ist

$$\tan \theta_u = \frac{u'_y}{u'_x} = -\frac{u}{\gamma v}. \quad (13)$$

Aufgabe 2: Lorentz-Transformation der Felder

- (a) Das Bezugssystem K' bewegt sich relativ zum Bezugssystem K mit Geschwindigkeit $\vec{v} = v\vec{e}_z$. Zeigen Sie explizit, dass die z -Komponenten des Magnetfeldes in beiden Systemen gleich sind.

Der Feldstärketensor ist gegeben durch (s. Vorlesung)

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Vom System K zu K' gelangt man über einen Boost in z -Richtung

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \cosh \eta & 0 & 0 & -\sinh \eta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \eta & 0 & 0 & \cosh \eta \end{pmatrix} \quad (15)$$

Die z -Komponente des Magnetfeldes im System K' ist

$$B'_z = F'^{21} = \Lambda^2{}_\alpha \Lambda^1{}_\beta F^{\alpha\beta}. \quad (16)$$

Außer $\Lambda^2{}_2 = 1$ und $\Lambda^1{}_1 = 1$ sind alle Komponenten von $\Lambda^2{}_\alpha$ und $\Lambda^1{}_\beta$ identisch Null. Daraus folgt

$$B'_z = F'^{21} = \Lambda^2{}_2 \Lambda^1{}_1 F^{21} = B_z. \quad (17)$$

- (b) *Ist eine Feldkonfiguration möglich, die in einem bestimmten Inertialsystem als ein reines elektrisches Feld erscheint, in einem anderen Inertialsystem als ein reines Magnetfeld?*

Nein, eine solche Feldkonfiguration ist nicht möglich.

Das Lorentzskalar

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2 (\vec{B}^2 - \vec{E}^2) \quad (18)$$

ist invariant unter Lorentztransformationen.

Angenommen es gibt eine solche Feldkonfiguration:

$$\vec{B} = 0 \quad \vec{E} \neq 0 \quad \text{in System } K, \quad (19)$$

$$\vec{B}' \neq 0 \quad \vec{E}' = 0 \quad \text{in System } K'. \quad (20)$$

Dann würde

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -2\vec{E}^2 < 0 \quad (21)$$

$$F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} = 2\vec{B}'^2 > 0 \quad (22)$$

gelten und die Lorentzinvarianz wäre verletzt.

- (c) *Bestimmen Sie das skalare Potential und das Vektorpotential einer sich mit der konstanten Geschwindigkeit v entlang der z -Achse bewegendes Punktladung e . In welchen Richtungen ist das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r}, t = 0)$ am stärksten, bzw. schwächsten bei gleichem $|\vec{r}|$?*

Im Ruhesystem K' der Ladung sind die Felder und Potentiale durch die Elektrostatik gegeben:

$$\vec{E}' = \frac{e\vec{r}'}{r'^3} \quad (23)$$

$$\vec{B}' = 0 \quad (24)$$

$$\phi' = \frac{e}{r'} \quad (25)$$

$$\vec{A}' = 0 \quad (26)$$

wobei $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$. Die Potentiale im System K , indem sich die Ladung e mit der Geschwindigkeit v in z -Richtung bewegt, erhält man über einen Lorentz-boost in $-z$ -Richtung aus $A'^\mu = (\phi', A'_x, A'_y, A'_z)^T$:

$$\begin{aligned} A^\mu &= \Lambda^\mu_{\nu} A'^\nu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{e}{r'} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma \frac{e}{r'} \\ 0 \\ 0 \\ \beta\gamma \frac{e}{r'} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mit der Transformation der Ortskoordinaten $x' = x$, $y' = y$ und $z' = \gamma(z - vt)$ erhält man:

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \gamma \frac{e}{\sqrt{x^2 + y^2 + (\gamma(z - vt))^2}} \\ 0 \\ 0 \\ \gamma \frac{ev}{c\sqrt{x^2 + y^2 + (\gamma(z - vt))^2}} \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Das E -Feld erhält man mit $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ oder aus der Transformation des Feldstärketensors $F^{\mu\nu}$ (in der Vorlesung hergeleitet):

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \gamma \frac{e}{(x^2 + y^2 + \gamma^2(z - vt)^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z - vt \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist das E -Feld

$$\vec{E}(\vec{r}, 0) = \gamma \frac{e}{(x^2 + y^2 + \gamma^2 z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (29)$$

und damit

$$|\vec{E}(\vec{r}, 0)| = \gamma \frac{er}{(x^2 + y^2 + \gamma^2 z^2)^{3/2}}. \quad (30)$$

Das E -Feld ist nun bei festem r maximal, wenn

$$\begin{aligned} \rho^2 &= x^2 + y^2 + (\gamma z)^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - z^2 + (\gamma z)^2 \\ &= r^2 - z^2 + (\gamma z)^2 \end{aligned}$$

minimal ist und umgekehrt. Mit $z = r \cos \theta$:

$$\rho^2 = r^2 (1 + \cos^2 \theta (\gamma^2 - 1))$$

ist minimal für $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ (d.h. für $z = 0 \Rightarrow \vec{r} \perp \vec{v}$) und maximal für $\theta = 0, \pi$ (d.h. für $x = y = 0 \Rightarrow \vec{r} \parallel \vec{v}$). Damit ist das E -Feld minimal in z -Richtung (Bewegungsrichtung) und maximal senkrecht zur Bewegungsrichtung.

Aufgabe 3: Relativistische Bewegungsgleichung

Auf ein Teilchen mit der Ruhemasse m wirke eine konstante Kraft f_0 in x -Richtung.

- (a) Lösen Sie die relativistische Bewegungsgleichung. Finden Sie $\vec{r}(t)$ mit den Anfangswerten $\vec{r}(0) = 0$ und $\vec{v}(0) = 0$.

Die relativistische Bewegungsgleichung lautet

$$F^\mu = m \frac{du^\mu}{d\tau} . \quad (31)$$

Da die Kraft nur in x -Richtung wirkt, genügt es diese Komponente zu betrachten:

$$f_0 = m \frac{d(\gamma v)}{dt} \quad (32)$$

$$\int_0^t \frac{f_0}{m} dt' = \int_0^v d(\gamma(v')v') \quad (33)$$

$$\frac{f_0 t}{m} = \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (34)$$

$$v^2 = \frac{f_0^2 t^2}{m^2 (1 + \frac{f_0^2 t^2}{m^2 c^2})} \quad (35)$$

$$v(t) = \frac{f_0 t}{m \sqrt{1 + \frac{f_0^2 t^2}{m^2 c^2}}} = \frac{dr(t)}{dt} \quad (36)$$

$$\int_0^r dr' = \int_0^t \frac{f_0 t'}{m \sqrt{1 + \frac{f_0^2 t'^2}{m^2 c^2}}} dt' \quad (37)$$

Mit der Substitution

$$w = \frac{f_0 t'}{mc}$$

und

$$\int \frac{w}{\sqrt{1 + w^2}} = \sqrt{1 + w^2}$$

erhält man

$$r(t) = \frac{mc^2}{f_0} \left(\sqrt{1 + \frac{f_0^2 t^2}{m^2 c^2}} - 1 \right) \quad (38)$$

Der Vierer-Vektor lautet

$$x^\mu(t) = \begin{pmatrix} ct \\ \frac{mc^2}{f_0} \left(\sqrt{1 + \frac{f_0^2 t^2}{m^2 c^2}} - 1 \right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (39)$$

- (b) Geben Sie $\vec{r}$ als Funktion der Eigenzeit τ an. Bestimmen Sie die 4-Geschwindigkeit u^μ und 4-Beschleunigung $du^\mu/d\tau$ des Teilchens.

Mit

$$d\tau = \frac{1}{\gamma} dt = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$$

und $v^2(t)$ aus Gl. (35) erhält man nach leichter Umformung

$$d\tau = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{f_0^2 t^2}{m^2 c^2}}} dt \quad (40)$$

$$\int_{\tau(0)=0}^{\tau(t)} d\tau' = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{f_0^2 t'^2}{m^2 c^2}}} dt' . \quad (41)$$

Mit der Substitution

$$w = \frac{f_0 t}{mc}$$

und

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 + w^2}} dw = \operatorname{arsinh}(w) \quad (42)$$

ist

$$\tau(t) = \frac{mc}{f_0} \operatorname{arsinh}\left(\frac{f_0 t}{mc}\right) \quad (43)$$

und damit

$$t(\tau) = \frac{mc}{f_0} \sinh\left(\frac{f_0 \tau}{mc}\right) . \quad (44)$$

Ersetzt man t in Gleichung (39) mit $t(\tau)$ bekommt man

$$x^\mu(\tau) = \begin{pmatrix} \frac{mc^2}{f_0} \sinh\left(\frac{f_0 \tau}{mc}\right) \\ \frac{mc^2}{f_0} \left(\sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{f_0 \tau}{mc}\right)} - 1 \right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (45)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{mc^2}{f_0} \sinh\left(\frac{f_0 \tau}{mc}\right) \\ \frac{mc^2}{f_0} \left(\cosh\left(\frac{f_0 \tau}{mc}\right) - 1 \right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (46)$$

und damit

$$u^\mu(\tau) = \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} = \begin{pmatrix} c \cosh\left(\frac{f_0 \tau}{mc}\right) \\ c \sinh\left(\frac{f_0 \tau}{mc}\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (47)$$

$$\frac{du^\mu(\tau)}{d\tau} = \begin{pmatrix} \frac{f_0}{m} \sinh\left(\frac{f_0 \tau}{mc}\right) \\ \frac{f_0}{m} \cosh\left(\frac{f_0 \tau}{mc}\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (48)$$

Aufgabe 4: 2-dimensionalen Vektorraum

In der Basis e_1, e_2 für einen 2-dimensionalen Vektorraum sei eine Metrik gegeben durch

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (g^{\mu\nu}) = (g_{\mu\nu})^{-1}.$$

Der Tensor T sei definiert durch

$$(T_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Matrizen $T_\mu{}^\nu$, $T^\mu{}_\nu$, $T^{\mu\nu}$.

Zuerst benötigt man die inverse Metrik:

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{\det(g_{\mu\nu})} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (49)$$

Damit erhält man:

$$T_\mu{}^\nu = T_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (50)$$

$$T^\mu{}_\nu = g^{\mu\alpha} T_{\alpha\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (51)$$

$$T^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} T_{\alpha\beta} g^{\beta\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (52)$$

(b) Betrachten Sie die Basistransformation

$$\bar{e}_1 = e_1 + 2e_2, \quad \bar{e}_2 = e_1. \quad (53)$$

Bestimmen Sie die Transformationsmatrizen $\Lambda^\mu{}_\nu$ und $\Lambda_\mu{}^\nu$, sowie die transformierten Komponenten $\bar{g}_{\mu\nu}$ und $\bar{T}^{\mu\nu}$.

In Matrixform lautet die Transformation:

$$\begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \quad (54)$$

und damit

$$\bar{e}_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu e_\nu \quad \text{mit} \quad \Lambda_\mu{}^\nu = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (55)$$

$\Lambda^\mu{}_\nu$ ist das transponierte der Inversen von $\Lambda_\mu{}^\nu$:

$$\begin{aligned} \Lambda^\mu{}_\nu &= \left((\Lambda_\mu{}^\nu)^{-1} \right)^T = \left(\frac{1}{\det(\Lambda_\mu{}^\nu)} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right)^T \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Mit der Transformation eines Tensors findet man (In der vorigen Version war in der transponierten Matrix Λ in der Berechnung von $\bar{g}_{\mu\nu}$ ein Schreibfehler):

$$\begin{aligned}\bar{g}_{\mu\nu} &= \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ \bar{T}^{\mu\nu} &= \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Aufgabe 5: Energie-Impuls-Tensor

Der Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes ist gegeben durch

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(F^\mu_\alpha F^{\alpha\nu} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right), \quad (56)$$

wobei g die Minkowski-Metrik bezeichnet (s. Vorlesung).

(a) Zeigen Sie explizit, dass in Abwesenheit von Strömen und Ladungen $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ gilt.

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left((\partial_\mu F^\mu_\alpha) F^{\alpha\nu} + F^\mu_\alpha (\partial_\mu F^{\alpha\nu}) + \frac{1}{4} \partial^\nu (F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}) \right)$$

Mit der inhomogenen Maxwell-Gleichung $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu$ und $j^\nu = 0$ verschwindet der erste Term:

$$\begin{aligned}\partial_\mu T^{\mu\nu} &= \frac{1}{4\pi} \left(F^\mu_\alpha (\partial_\mu F^{\alpha\nu}) + \underbrace{\frac{1}{4} (\partial^\nu F_{\alpha\beta}) F^{\alpha\beta}}_{=\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} (\partial^\nu F^{\alpha\beta})} + \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} (\partial^\nu F^{\alpha\beta}) \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(F^\mu_\alpha (\partial_\mu F^{\alpha\nu}) + \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} \partial^\nu F^{\alpha\beta} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{2} F^\mu_\alpha (\partial_\mu F^{\alpha\nu}) + \frac{1}{2} F^\mu_\alpha (\partial_\mu F^{\alpha\nu}) + \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} \partial^\nu F^{\alpha\beta} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{2} F_{\mu\alpha} (\partial^\mu F^{\alpha\nu}) + \frac{1}{2} F_{\mu\alpha} (\partial^\mu F^{\alpha\nu}) + \frac{1}{2} F_{\mu\alpha} \partial^\nu F^{\mu\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{8\pi} F_{\mu\alpha} \left(\partial^\mu F^{\alpha\nu} + \underbrace{\partial^\mu F^{\alpha\nu} + \partial^\nu F^{\mu\alpha}}_{(*)} \right)\end{aligned}$$

Mit der Identität

$$\partial^\mu F^{\alpha\nu} + \partial^\nu F^{\mu\alpha} + \partial^\alpha F^{\nu\mu} = 0$$

ist (*) durch

$$-\partial^\alpha F^{\nu\mu} = \partial^\alpha F^{\mu\nu}$$

gegeben.

$$\begin{aligned}\partial_\mu T^{\mu\nu} &= \frac{1}{8\pi} F_{\mu\alpha} (\partial^\mu F^{\alpha\nu} + \partial^\alpha F^{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{8\pi} (F_{\mu\alpha} \partial^\mu F^{\alpha\nu} - F_{\alpha\mu} \partial^\alpha F^{\mu\nu}) = 0\end{aligned}$$

(b) Was gilt für $\partial_\mu T^{\mu\nu}$, wenn $j^\nu \neq 0$?

Die hinteren Terme verschwinden analog. Der ersten Term liefert jedoch den Strom:

$$\begin{aligned}\partial_\mu T^{\mu\nu} &= \frac{1}{4\pi} ((\partial_\mu F^\mu_\alpha) F^{\alpha\nu}) \\ &= \frac{1}{c} j_\alpha F^{\alpha\nu}\end{aligned}$$

(c) Ausgehend von Gl. (56), drücken Sie die Komponenten T^{00} , T^{0i} und T^{ij} durch $\vec{E}$ und $\vec{B}$ aus. Was ist die physikalische Bedeutung von T^{00} und T^{0i} ?

Man benötigt den Feldstärketensor in folgenden Formen:

$$\begin{aligned}F^{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \\ F^\mu_\nu = F^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} &= \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \\ F_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} F^{\alpha\beta} g_{\beta\nu} &= \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}T^{00} &= \frac{1}{4\pi} \left(F^0_\alpha F^{\alpha 0} + \frac{1}{4} g^{00} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\vec{E}^2 + \frac{1}{4} 2(\vec{B}^2 - \vec{E}^2) \right) \\ &= \frac{1}{8\pi} (\vec{B}^2 + \vec{E}^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T^{0i} &= \frac{1}{4\pi} \left(F^0_\alpha F^{\alpha i} + \frac{1}{4} \underbrace{g^{0i}}_{=0} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B})_i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T^{ij} &= \frac{1}{4\pi} \left(F^i{}_{\alpha} F^{\alpha j} + \frac{1}{4} g^{ij} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \\
&= -\frac{1}{4\pi} \left(E^i E^j + B^i B^j - \frac{1}{2} \delta^{ij} (\vec{B}^2 + \vec{E}^2) \right)
\end{aligned}$$

T^{00} ist die Energiedichte w_e und T^{0i} ist $\frac{1}{c}S_i$, wobei $\vec{S}$ der Poynting-Vektor ist.