KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE

INSTITUT FÜR THEORIE DER KONDENSIERTEN MATERIE

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik III (Theorie C – Elektrodynamik) WS 12-13

Prof. Dr. Alexander Mirlin

Dr. Igor Gornyi

Blatt 8

Besprechung 5.12.2012

Auf diesem Übungsblatt verwenden wir die folgenden Notation:

$$\hat{r} \equiv \vec{e}_r, \quad \hat{z} \equiv \vec{e}_z, \quad \hat{\rho} \equiv \vec{e}_\rho, \quad \hat{\phi} \equiv \vec{e}_\phi.$$

Aufgabe 1: **Coulomb-Eichung** (2+2+2+4=10 Punkte)

In der Coulomb-Eichung gilt

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0. \tag{1}$$

Die Stromdichte $\vec{j}$ kann als Summe eines parallelen Anteils $\vec{j}_\parallel$ und eines senkrechten Anteils $\vec{j}_\perp$ geschrieben werden. Es gilt

$$\vec{j}_\parallel(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\int d^3r'\,\frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}, \tag{2}$$

$$\vec{j}_\perp(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\int d^3r'\,\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}. \tag{3}$$

(a) Ausgehend von den Gleichungen (2) und (3), finden Sie

$$\vec{\nabla}\times\vec{j}_\parallel, \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{j}_\parallel, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{j}_\perp, \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{j}_\perp.$$

Lösung: Wir betrachten zunächst die Divergenz einer Rotation und die Rotation eines Gradienten:

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\right) = \partial_{x_i}\varepsilon_{ijk}\partial_{x_j}a_k = 0\ , \tag{4}$$

$$\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\cdot b\right)\right]_k = \varepsilon_{ijk}\partial_{x_i}\partial_{x_j}b = 0\ . \tag{5}$$

Beide Ausdrücke verschwinden, da die Kontraktion des antisymmetrischen Tensors ε_{ijk} mit den symmetrischen Tensoren $\partial_i\partial_j a_k$, bzw. $\partial_i\partial_j b$ verschwindet. Hierbei nehmen wir an, dass a_k und b zweimal stetig differenzierbar sind. Es folgt

$$\vec{\nabla}\times\vec{j}_\parallel = \vec{\nabla}\cdot\vec{j}_\perp = 0\ . \tag{6}$$

Betrachten wir nun

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_\parallel = -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}^2\int \mathrm{d}^3r'\,\frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{j}\,(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\ . \tag{7}$$

Mit der Identiät

$$\vec{\nabla}^2\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}')\ , \tag{8}$$

vereinfacht sich Gl. (7) zu

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_{\parallel} \quad = \quad \int \mathrm{d}^3r'\,\vec{\nabla}'\cdot\vec{j}\,(\vec{r}')\,\delta(\vec{r}-\vec{r}') = \vec{\nabla}\cdot\vec{j}\,. \tag{9}$$

Betrachten wir nun die verbleibende Rotation

$$\vec{\nabla}\times\vec{j}_{\perp} \quad = \quad \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\int \mathrm{d}^3r'\,\frac{\vec{j}\,(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,. \tag{10}$$

Mit der Identität

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{a}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{a}) - \nabla^2\vec{a}\,, \tag{11}$$

erhalten wir aus Gl. (10) und Gl. (5),

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{a} \quad = \quad \vec{\nabla}\times\left[\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{a}\right] = -\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}^2\vec{a}\right)\,. \tag{12}$$

Mit diesem Ergebnis und Gl. (8) erhalten wir

$$\vec{\nabla}\times\vec{j}_{\perp} \quad = \quad \vec{\nabla}\times\vec{j}\,. \tag{13}$$

Alternativ hätte man auch einfach die Rotation und Divergenz des Stromes betrachten können:

$$\vec{\nabla}\times\vec{j} \quad = \quad \underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{j}_{\parallel}}_{0} + \vec{\nabla}\times\vec{j}_{\perp} = \vec{\nabla}\times\vec{j}_{\perp}\,, \tag{14}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j} \quad = \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{j}_{\parallel} + \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_{\perp}}_{0} = \vec{\nabla}\cdot\vec{j}_{\parallel}\,. \tag{15}$$

(b) Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

$$\frac{1}{c}\vec{\nabla}\frac{\partial\varphi}{\partial t} \quad = \quad \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{\parallel}, \tag{16}$$

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} \quad = \quad -\frac{4\pi}{c}\vec{j}_{\perp}. \tag{17}$$

Lösung: Wir betrachten die beiden inhomogenen Maxwell Gleichungen im Vakuum

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} \quad = \quad 4\pi\rho\,, \tag{18}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} \quad = \quad \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{\partial_t}{c}\vec{E}\,. \tag{19}$$

Wenn wir die Felder durch die elektromagnetischen Potentiale

$$\vec{E} \quad = \quad -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial_t}{c}\vec{A}\,, \tag{20}$$

$$\vec{B} \quad = \quad \vec{\nabla}\times\vec{A}\,, \tag{21}$$

ausdrücken, erhalten wir

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} \quad = \quad -\Delta\varphi - \frac{\partial_t}{c}\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 4\pi\rho\,, \tag{22}$$

und

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times A = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) - \Delta A \\ &= \frac{4\pi}{c}\vec{j} - \frac{\partial_t^2}{c^2}\vec{A} - \vec{\nabla}\frac{\partial_t}{c}\varphi \,. \end{aligned} \tag{23}$$

Durch die Coulomb-Eichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ vereinfachen sich Gl. (22) und Gl. (23) zu

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho \,, \tag{24}$$

$$\Box\vec{A} = \vec{\nabla}\frac{\partial_t}{c}\varphi - \frac{4\pi}{c}\vec{j} \,, \tag{25}$$

mit $\Box = \Delta - \partial_t^2/c^2$. Gleichung (24) erkennen wir als Poisson-Gleichung mit der Lösung

$$\varphi(\vec{r}, t) = \int \mathrm{d}^3r' \, \frac{\rho(\vec{r}\,', t)}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \,. \tag{26}$$

Mit der Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t\rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \,, \tag{27}$$

erhalten wir aus Gl. (26),

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}\vec{\nabla}\partial_t\varphi &= \frac{1}{c}\vec{\nabla}\int \mathrm{d}^3r' \, \frac{-\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}\,', t)}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \\ &= \frac{4\pi}{c}\vec{j}_\parallel \,, \end{aligned} \tag{28}$$

und durch Einsetzen in Gl. (25) folgt,

$$\Box\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_\parallel - \frac{4\pi}{c}\left(\vec{j}_\parallel + \vec{j}_\perp\right) = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}_\perp \,. \tag{29}$$

(c) Berechnen Sie die fouriertransformierte parallele und senkrechte Stromdichte $\vec{j}_\parallel(\vec{k})$ und $\vec{j}_\perp(\vec{k})$. Die Fouriertransformation ist dabei definiert als

$$\vec{j}(\vec{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \, \vec{j}(\vec{k}) \, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \tag{30}$$

Warum werden $\vec{j}_\parallel$ und $\vec{j}_\perp$ parallele bzw. senkrechte Stromdichte genannt?

Lösung: Die Umkehrtransformation zu Gl. (30) lautet

$$\vec{j}(\vec{k}) = \int d^3r \, \vec{j}(\vec{r}) \, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \,. \tag{31}$$

Es gilt die Orthogonalitätsbeziehung

$$\int d^3r \, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} = (2\pi)^3\delta(\vec{k}) \,, \tag{32}$$

und

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \delta(\vec{r})\,. \tag{33}$$

Wir betrachten zunächst die parallele Stromdichte. Wir setzen Gl. (30) in die Definition von $\vec{j}_\parallel$, Gl. (2), ein,

$$\begin{aligned}
\vec{j}_\parallel(\vec{r}) = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\, \vec{j}_\parallel\big(\vec{k}\big)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} &= -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\int \mathrm{d}^3r'\, \frac{\vec{\nabla}'\cdot\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\,\vec{j}\big(\vec{k}\big)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}'}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \\
&= -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\int d^3r'\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{i\vec{k}\cdot\vec{j}(\vec{k})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}'}
\end{aligned} \tag{34}$$

und translatieren $\vec{r}'$ um $\vec{r}$. Da wir nur translatieren, verändert sich das Integrationsmaß nicht und da wir über den ganzen Raum integrieren, ändern sich die Integrationsgrenzen nicht:

$$\vec{j}_\parallel(\vec{r}) \overbrace{=}^{\vec{r}_1\equiv\vec{r}'-\vec{r}} -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\int d^3r_1\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{i\vec{k}\cdot\vec{j}(\vec{k})}{|\vec{r}_1|}\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_1}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \tag{35}$$

$$= \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left(-\frac{1}{4\pi}\int d^3r_1\,(i\vec{k})\,\frac{i\vec{k}\cdot\vec{j}(\vec{k})}{|\vec{r}_1|}\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_1}\right)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\,. \tag{36}$$

Mit der Umkehrtransformation (31) und der Relation (32) folgt,

$$\begin{aligned}
\vec{j}_\parallel(\vec{k}) &= -\frac{1}{4\pi}i\vec{k}\int d^3r_1\frac{i\vec{k}\cdot\vec{j}(\vec{k})}{|\vec{r}_1|}\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_1} \\
&= -\frac{1}{4\pi}i\vec{k}(i\vec{k}\cdot\vec{j}(\vec{k}))\int d^3r_1\,\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_1}}{|\vec{r}_1|}.
\end{aligned} \tag{37}$$

Kümmern wir uns nun um die Fouriertransformation von $1/\left|\vec{r}\right|$:

$$\begin{aligned}
\int d^3r\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{|\vec{r}|} &= \int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}d\theta\,\sin\theta\int_0^{\infty}dr\;r\;e^{ikr\cos\theta} \\
&= 2\pi\int_{-1}^{1}dt\int_0^{\infty}dr\;r\;e^{ikrt} = 2\pi\int_0^{\infty}dr\;\frac{1}{ik}\left(e^{ikr}-e^{-ikr}\right) \\
&= 4\pi\int_0^{\infty}\mathrm{d}r\;\frac{\sin kr}{k}\,.
\end{aligned} \tag{38}$$

Hierbei wurde die $\hat{z}$-Achse in $\hat{k}$-Richtung gelegt und zu Kugelkoordinaten gewechselt. Wir führen den Konvergenerzeugenden Faktor $\epsilon > 0$ ein (am Ende schicken wir $\epsilon \to 0$) und erhalten

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}^3r\,\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{r} &= \lim_{\epsilon\to0}\frac{4\pi}{k}\int_0^{\infty}\mathrm{d}r\;e^{-\epsilon r}\sin kr = \lim_{\epsilon\to0}\frac{4\pi}{k}\mathrm{Im}\int_0^{\infty}\mathrm{d}r\;e^{(ik-\epsilon)r} \\
&= \lim_{\epsilon\to0}\frac{4\pi}{k}\mathrm{Im}\left[\frac{e^{(ik-\epsilon)r}}{ik-\epsilon}\right]_0^{\infty} \\
&= \lim_{\epsilon\to0}\frac{4\pi}{k\left(k^2+\epsilon^2\right)}\mathrm{Im}\,\left[(ik+\epsilon)\left(\cos kr+i\sin kr\right)e^{-\epsilon r}\right]_0^{\infty} \\
&= \lim_{\epsilon\to0}\frac{4\pi}{k\left(k^2+\epsilon^2\right)}\mathrm{Im}\;(ik+\epsilon) = \frac{4\pi}{k^2}\,.
\end{aligned} \tag{39}$$

Somit ergibt sich

$$\vec{j}_{\|}(\vec{k}) = -\frac{1}{4\pi} i\vec{k}(i\vec{k}\cdot\vec{j}(\vec{k}))\frac{4\pi}{k^2} = \frac{\vec{k}(\vec{k}\cdot\vec{j}(\vec{k}))}{k^2}\,, \tag{40}$$

Da die Fouriertransformation linear ist erhalten wir die Komponente $j_\perp(\vec{k})$ einfach aus

$$\begin{aligned}\vec{j}_\perp(\vec{k}) &= \vec{j}(\vec{k}) - \vec{j}_{\|}(\vec{k}) = \vec{j}(\vec{k}) - \frac{\vec{k}(\vec{k}\cdot\vec{j}(\vec{k}))}{k^2} \\ &= \left(1 - \frac{\vec{k}\vec{k}^T}{k^2}\right)\vec{j}(\vec{k}).\end{aligned} \tag{41}$$

Aus Gl. (40) wird ersichtlich, dass $\vec{j}_{\|}(\vec{k})$ in $\vec{k}$-Richtung zeigt. Gleichung (41) enthält den Projektor auf den orthogonalen Unterraum zu $\vec{k}$. Insgesamt gilt also

$$\vec{j}_{\|}(\vec{k}) \;||\; \vec{k}, \qquad \vec{j}_\perp(\vec{k}) \perp \vec{k}\,.$$

Die Bezeichnungen senkrechter (transversaler) Anteil für $\vec{j}_\perp$ und paralleler (longitudinaler) Anteil für $\vec{j}_{\|}$ beziehen sich also auf die Richtung von $\vec{k}$.

(d) Zwei punktförmige Ladungsverteilungen befinden sich bei $\vec{r}_1 = (0,0,-a)$ und $\vec{r}_2 = (0,0,a)$. Entlang der z-Achse zwischen den Ladungsverteilungen fließt ein konstanter Strom derart, dass die Ladung q_1 monoton mit der Zeit wächst und die Ladung q_2 im gleichen Maße mit der Zeit abnimmt:

$$q_1(t) = q_1(0) + It, \qquad q_2(t) = q_2(0) - It. \tag{42}$$

Berechnen Sie die parallele bzw. senkrechte Stromdichte.

Lösung: Die Strom- und Ladungsdichte des Problems sind

$$\vec{j} = -\hat{z}\,\delta(x)\delta(y)\Theta(a-|z|)I\,, \tag{43}$$

$$\begin{aligned}\rho &= q_1(t)\delta(x)\delta(y)\delta(a+z) + q_2(t)\delta(x)\delta(y)\delta(a-z) \\ &= \delta(x)\delta(y)[(q_1(0)+It)\delta(a+z) + (q_2(0)-It)\delta(a-z)]\end{aligned} \tag{44}$$

Mit der Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t\rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0 \tag{45}$$

erhalten wir

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = I\delta(x)\delta(y)[\delta(a-z) - \delta(a+z)]. \tag{46}$$

Zunächst berechnen wir die parallele Stromdichte. Setzen wir $\vec{\nabla}\cdot\vec{j}$ in die Definition von $\vec{j}_{\|}$ ein, erhalten wir

$$\begin{aligned}\vec{j}_{\|}(\vec{r}) &= -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\int d^3r'\,\frac{I\delta(x')\delta(y')[\delta(a-z')-\delta(a+z')]}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \\ &= -\frac{I}{4\pi}\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r}-a\hat{z}|} - \frac{1}{|\vec{r}+a\hat{z}|}\right) \\ &= \frac{I}{4\pi}\left(\frac{\vec{r}-a\hat{z}}{|\vec{r}-a\hat{z}|^3} - \frac{\vec{r}+a\hat{z}}{|\vec{r}+a\hat{z}|^3}\right).\end{aligned} \tag{47}$$

Und damit folgt für den senkrechten Anteil $\vec{j}_\perp$,

$$\begin{aligned}\vec{j}_\perp(\vec{k}) &= \vec{j}(\vec{k}) - \vec{j}_\parallel(\vec{k}) \\ &= -\hat{z}\,\delta(x)\delta(y)\Theta(a-|z|)I - \vec{j}_\parallel(\vec{k}) \\ &= -\frac{I}{4\pi}\left[\hat{z}4\pi\delta(x)\delta(y)\Theta(a-|z|) + \frac{\vec{r}-a\hat{z}}{|\vec{r}-a\hat{z}|^3} - \frac{\vec{r}+a\hat{z}}{|\vec{r}+a\hat{z}|^3}\right]. \end{aligned} \tag{48}$$

Aufgabe 2: **Spannungstensor** (2 Punkte)

Die Kraft, die auf ein geladenes Objekt im elektromagnetischen Feld wirkt, kann mit Hilfe des Maxwellschen Spannungstensors T_{ij} berechnet werden.

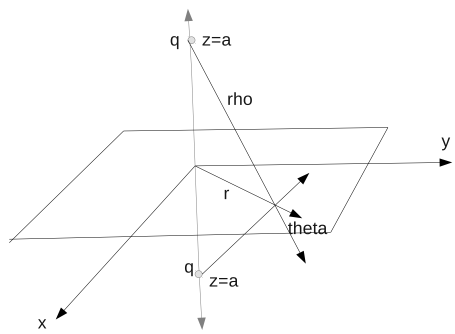
Betrachten Sie nun zwei gleichnamige Punktladungen q und berechnen Sie die wirkenden Kräfte, indem Sie den Spannungstensor über jene Ebene integrieren, die im gleichen Abstand zwischen beiden Punktladungen liegt. Diskutieren Sie Richtung bzw. Vorzeichen der Kräfte.

Lösung:

Die Kraft, die auf ein geladenes Objekt im elektrischen Feld wirkt, ist gegeben durch:

$$\vec{F} = \oint_S \boldsymbol{T}\cdot d\vec{s}\,, \tag{49}$$

wobei die Fläche S das geladene Objekt umschließt. Wir betrachten zwei gleiche Punktladungen auf der z-Achse, deren Entfernung von einander $2a$ beträgt und das Flächenelement $\mathrm{d}\vec{s}$ zwischen den beiden Ladungen in der x,y-Ebene.



Wir möchten die Kraft auf die obere Ladung berechnen, dazu betrachten wir folgenden Ausdruck:

$$(\boldsymbol{T}\mathrm{d}\vec{s})_z = T_{zx}\mathrm{d}s_x + T_{zy}\mathrm{d}s_y + T_{zz}\mathrm{d}s_z \tag{50}$$

mit $\mathrm{d}s_x = \mathrm{d}s_y = 0$, $\mathrm{d}s_z = \mp r\mathrm{d}r\ \mathrm{d}\phi$ (je nachdem ob wir die obere oder untere Ladung betrachten) und dem Maxwell'schen Spannungstensor

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi}\left[E_iE_j + B_iB_j - \frac{1}{2}\left(E^2+B^2\right)\delta_{ij}\right]\,. \tag{51}$$

Damit erhalten wir

$$(\boldsymbol{T}\mathrm{d}\vec{s})_z = \mp\frac{1}{4\pi}\left(E_zE_z - \frac{1}{2}E^2\right) r\mathrm{d}r\ \mathrm{d}\phi\,. \tag{52}$$

Aus der Skizze sehen wir

$$\vec{E} = 2\frac{q}{\rho^2}\cos\theta\hat{r} \tag{53}$$

mit $\cos\theta = r/\rho$ und $\rho = \sqrt{r^2 + a^2}$. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} E_z &= 0\,, & (54)\\ E^2 &= 4q^2\frac{r^2}{\left(r^2+a^2\right)^3}\,. & (55)\end{aligned}$$

Einsetzen von Gl. (54) und (55) in Gl. (52) und (49) liefert

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{obere}} &= \int (\boldsymbol{T}\cdot \mathrm{d}\vec{s})_z\,\hat{z} & (56)\\ &= \frac{1}{2\pi}q^2 2\pi\int_0^\infty \mathrm{d}r\,\frac{r^3}{\left(r^2+a^2\right)^3}\hat{z} \\ &= q^2\frac{1}{(2a)^2}\hat{z}\end{aligned}$$

für die obere Ladung. Um die Kraft auf die untere Ladung auszurechnen müssen wir nur $\mathrm{d}s_z$ durch -$\mathrm{d}s_z$ ersetzen:

$$\vec{F}_{\text{untere}} = -q^2\frac{1}{(2a)^2}\hat{z}. \tag{57}$$

Der Rest der umschließenden Fläche kann vernachlässigt werden, da das elektrische Feld schnell genug abfällt:

$$\begin{aligned} \vec{E}(R\to\infty) &\simeq \frac{2q}{R^2}\hat{R}, & (58)\\ E^2(R\to\infty) &\propto \frac{1}{R^4}, & (59)\\ d\vec{s} &= \hat{R}\;R^2\sin(\theta)d\theta d\phi, & (60)\\ E^2 ds &\propto \frac{1}{R^2}\underbrace{\rightarrow}_{R\to\infty}0. & (61)\end{aligned}$$

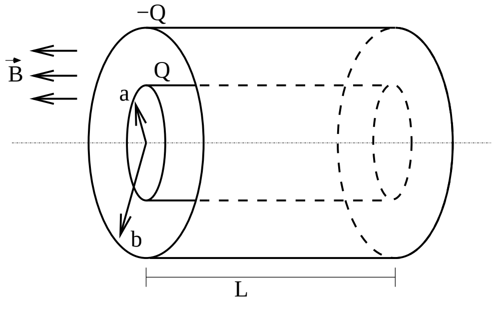
Aufgabe 3: **Drehimpuls einer Verteilung von Feldern** (2+2+4=8 Punkte)

Der Drehimpuls einer Verteilung von Feldern ist definiert als

$$\vec{L}_{\text{em}} = \int_V d^3r\quad[\vec{r}\times\vec{g}_{\text{em}}(t,\vec{r})]\;, \tag{62}$$

wobei $\vec{g}_{\text{em}}$ die Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes ist.

Betrachten Sie ein Teilstück der Länge L eines unendlich ausgedehnten Zylinderkondensators, auf dem die Ladungen $\pm Q$ sitzen. Der Kondensator befinde sich in einem homogenen magnetischen Feld $\vec{B}$ entlang der Zylinderachse (s. Skizze).



(a) Bestimmen Sie den Poynting-Vektor $\vec{S}$ im Inneren des Kondensators.

Lösung: Der Poynting-Vektor ist definiert als

$$\vec{S} \;=\; \frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{B}\,. \tag{63}$$

Mit dem magnetischen Feld

$$\vec{B} = B_0\hat{z}\,,$$

und dem elektrischen Feld

$$\vec{E} = \frac{2Q}{L\rho}\hat{\rho}\,,$$

erhalten wir

$$\vec{S} \;=\; \frac{c\lambda B_0}{2\pi\rho}\hat{\rho}\times\hat{z} = -\frac{c\lambda B_0}{2\pi\rho}\hat{\phi}\,. \tag{64}$$

(b) Berechnen Sie den Drehimpuls des elektromagnetischen Feldes.

Lösung: Der Drehimpuls ist gegeben durch

$$\vec{L}_{\mathrm{em}} \;=\; \frac{1}{c^2}\int_V \mathrm{d}^3r\;\vec{r}\times\vec{S}\,. \tag{65}$$

Mit dem vorherigem Ergebnis erhalten wir

$$\vec{L}_{\mathrm{em}} \;=\; -\int_a^b \mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi \int_0^L \mathrm{d}z\;\rho\frac{\lambda B_0}{2\pi c\rho}\left(\rho\hat{\rho}+z\hat{z}\right)\times\hat{\phi}\,. \tag{66}$$

$\hat{z}\times\hat{\phi}$ liefert uns einen Beitrag in $\hat{\rho}$-Richtung, welcher durch die Integration über ϕ verschwindet. Mit $Q=\lambda\cdot L$ erhalten wir

$$\vec{L}_{\mathrm{em}} \;=\; -\frac{QB_0}{c}\int_a^b \mathrm{d}\rho\;\rho\hat{z} = -\frac{QB_0}{2c}\left(b^2-a^2\right)\hat{z}\,. \tag{67}$$

(c) Wir wollen nun die Drehimpulsbilanz betrachten, wenn das magnetische Feld abgeschaltet wird. Berechnen Sie dazu für eine Änderung des magnetischen Feldes $\partial\vec{B}/\partial t$ das Drehmoment, das vom induzierten elektrischen Feld auf die Ladungen $\pm Q$ ausgeübt wird und stellen Sie die Drehimpulsbilanz auf.

Lösung: Durch das Ausschalten des Magnetfeldes ändert sich der Fluss durch den Zylinder, was gemäß

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{1}{c}\partial_t\int\vec{B}\cdot d\vec{A} \tag{68}$$

ein elektrisches Feld

$$\vec{E}^{\mathrm{ind}} = -\frac{\rho}{2c}\,\frac{\partial B}{\partial t}\,\hat{\phi} \tag{69}$$

induziert. Dieses Feld bewirkt auf die Ladungen ein Gesamtdrehmoment

$$\vec{M}_{\mathrm{mech}} = -Qb\hat{\rho}\times\left.\vec{E}^{\mathrm{ind}}\right|_{\rho=b} + Qa\hat{\rho}\times\left.\vec{E}^{\mathrm{ind}}\right|_{\rho=a}\,, \tag{70}$$

$$M_{\mathrm{mech,z}} = \frac{Qb^2}{2c}\frac{\partial B}{\partial t} - \frac{Qa^2}{2c}\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{Q(b^2-a^2)}{2c}\frac{\partial B}{\partial t}\,, \tag{71}$$

so dass der Kondensator die mechanische Drehimpulskomponente

$$L_{\mathrm{mech},z}(t\to\infty) = \int_0^\infty dt M_{\mathrm{mech,z}}(t) = -\frac{QB_0}{2c}\left(b^2-a^2\right) = L_{\mathrm{em},z}(t=0) \tag{72}$$

erhält. Insgesamt gilt Drehimpulserhaltung.

Bemerkung: Analog zu dem Impulserhaltungssatz

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{P}_{\mathrm{mat}} + \vec{P}_{\mathrm{em}}\right) = \int_V d^3r\ \vec{\nabla}\cdot\boldsymbol{T} \tag{73}$$

$$= \oint_{S(V)} \boldsymbol{T}\cdot\mathrm{d}\vec{s}\,, \tag{74}$$

gibt es folgende Beziehung (Drehimpulserhaltungssatz, s. z.B. Classical Electrodynamics, Jackson, Second Edition, Section 6.8):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{L}_{\mathrm{mech}} + \vec{L}_{\mathrm{em}}\right) = \int_V d^3r\ \vec{r}\times\left(\vec{\nabla}\cdot\boldsymbol{T}\right)$$

$$= \int_{S(V)} \vec{r}\times(\boldsymbol{T}\cdot\mathrm{d}\vec{s})\ . \tag{75}$$

Auf der linken Seite haben wir das Drehmoment und auf der rechte Seite den Drehimpulsfluss durch die Einheitsfläche $S(V)$. In dieser Aufgabe ist der Gesamtdrehimpuls erhalten, daher wird der elektromagnetische Drehimpuls, ab dem Zeitpunkt des Ausschaltens ($t = 0$), vollständig in den mechanischen Drehimpuls umgewandelt (für $t \to \infty$). Wir erhalten also keinen elektromagnetischen Drehimpulsfluss durch die Oberfläche, wie wir es auch aufgrund von Gl. (75) erwarten.