

Taylor in 3D

à la Jackson: $\frac{1}{|\vec{r} + \vec{a}|} = \frac{1}{r} + \vec{a} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r} + \dots$

Entwicklungsparameter: $\vec{a}$
 wobei $|\vec{a}| \ll r \Rightarrow \frac{|\vec{a}|}{r} \ll 1$

? $\vec{a}^T \partial^2 (\frac{1}{r}) \vec{a}$

Hesse-Matrix

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{|\vec{r}| |\vec{e} + \frac{\vec{r}'}{r}|} \approx \frac{1}{|\vec{r}|} + \frac{1}{|\vec{r}|} \left(\vec{\nabla}_{\vec{r}'} \cdot \frac{1}{|\vec{e} - \frac{\vec{r}'}{r}|} \right) \cdot \vec{r}'$$

$\frac{|\vec{r}'|}{|\vec{r}|} \ll 1$

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \Big|_{\frac{\vec{r}'}{r} = 0} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

$$+ \frac{1}{2!} \frac{1}{|\vec{r}|} (\vec{r}')^T \left(\vec{\nabla}_{\vec{r}'} \vec{\nabla}_{\vec{r}'}^T \frac{1}{|\vec{e} - \frac{\vec{r}'}{r}|} \right) \vec{r}'$$

$\frac{\vec{\nabla}_{\vec{r}'} \vec{\nabla}_{\vec{r}'}^T}{\partial^2} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \vec{\nabla}_{\vec{r}'}^T \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + 3 \frac{(\vec{r} - \vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')^T}{|\vec{r} - \vec{r}'|^5}$

$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ partielle Ableitungen vertauschen

$$\Big|_{\frac{\vec{r}'}{r} = 0} = -\frac{1}{|\vec{r}|^3} \mathbb{1} + 3 \frac{\vec{r} \vec{r}^T}{|\vec{r}|^5}$$

$$\rightarrow -\frac{1}{2} \left(\frac{|\vec{r}'|^2}{|\vec{r}|^3} - 3 \frac{(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2}{|\vec{r}|^5} \right)$$

Erinnert ein bisschen an die Multipolenentwicklung von Blatt 3, geht? $\mathbb{1}$