Klassische Theoretische Physik III (Theorie C)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. T. Kasprzik, Dr. L. Mihaila
`http://www.ttp.kit.edu/~kasprzik/theoc/`

WS 13/14
Übungsblatt 2
Besprechung: 6.11.2013

Aufgabe 1: Eigenschaften der δ-Funktion

Die Diracsche Deltafunktion ist definiert über folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned} f(t_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) f(t) \mathrm{d}t\,, \\ \delta(x) &= 0 \quad \text{für} \quad x \neq 0 \qquad \text{und} \quad \delta(x) = \infty \quad \text{für} \quad x = 0\,. \end{aligned}$$

Hier ist $f(t)$ eine beliebige stetige Testfunktion.
Zeigen Sie, dass folgende Relationen für die Deltafunktion $\delta(x)$ gültig sind:

$$\text{(i)}\ \delta(-x) = \delta(x)\,, \quad \text{(ii)}\ x\delta(x) = 0\,, \quad \text{(iii)}\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\theta(x) = \delta(x)\,,\ \theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}\,,$$

$$\text{(iv)}\ \delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)\,, \quad \text{(v)}\ \delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|}(\delta(x-a) + \delta(x+a))\,,$$

$$\text{(vi)}\ \delta(f(x)) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\delta(x - x_n)}{|f'(x_n)|} \quad \text{mit} \quad f'(x_n) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_n}\,,$$

wobei f in (vi) nur einfache Nullstellen $n = 1, 2\ldots, N$ hat, d.h. $f(x_n) = 0\,, f'(x_n) \neq 0$.
Hinweis: Multiplizieren Sie mit einer Testfunktion, integrieren Sie von $-\infty$ bis $+\infty$ und berücksichtigen Sie die Definition der Deltafunktion.

Aufgabe 2: Homogen geladener dünner Stab

Betrachten Sie einen homogen geladenen dünnen Stab (Ladung q) der Länge $2a$ mit der Ladungsverteilung

$$\varrho(\vec{r}) = k\,\delta(x)\,\delta(y)\,\theta(a - |z|)\,.$$

(a) Berechnen Sie k aus $q = \int \mathrm{d}^3 r \rho(\vec{r})$.
(b) Berechnen Sie das Potenzial der Ladungsverteilung $\varphi(\rho, z)$ in Zylinderkoordinaten. Welche Form $\rho(z)$ haben die Äquipotenzialflächen?
(c) Berechnen Sie das zugehörige elektrische Feld $\vec{E}(\rho, z) = -\vec{\nabla}\varphi(\rho, z)$. Bestimmen Sie die Feldlinien als Funktionen $\rho(z)$ aus der Forderung

$$\mathrm{d}\vec{r} \times \vec{E}(\rho, z) = 0\,,$$

mit $\mathrm{d}\vec{r} = \vec{e}_\rho\,\mathrm{d}\rho + \vec{e}_z\,\mathrm{d}z + \vec{e}_\phi \rho\,\mathrm{d}\phi$.
Hinweis: Die resultierende Differenzialgleichung $A(\rho, z)\,\mathrm{d}\rho + B(\rho, z)\,\mathrm{d}z = 0$ kann mittels eines "Integrierenden Faktors" gelöst werden. Multiplizieren Sie hierzu obigen Ausdruck mit der Funktion $g(\rho) = \rho$. Das resultierende totale Differenzial $\mathrm{d}F(\rho, z) = \partial_\rho F\,\mathrm{d}\rho + \partial_z F\,\mathrm{d}z = 0$ kann einfach zu $F(\rho, z) = \text{const.}$ integriert werden.
(d) Skizzieren Sie die Äquipotenzialflächen und die Feldlinien.

Bitte wenden!

Aufgabe 3: Laplace-Operator in Kugel- und Zylinderkoordinaten

Zeigen Sie ausgehend von kartesischen Koordinaten, dass der Laplace-Operator in Zylinder- bzw. Kugelkoordinaten gegeben ist durch:

$$\triangle(r,\theta,\phi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\,, \tag{1}$$

$$\triangle(\rho,\phi,z) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,. \tag{2}$$

Hinweise: (a) Für die Herleitung von Gl. (1) gehen Sie folgendermaßen vor:

(i) Berechnen Sie die Einheitsvektoren der Kugelkoordinaten $(\vec{e}_r\,, \vec{e}_\theta\,, \vec{e}_\phi)$ in der Basis der kartesischen Koordinaten. Die Einheitsvektoren für Kugelkoordinaten sind definiert durch:

$$\vec{e}_r = \frac{\frac{\partial\vec{r}(r,\theta,\phi)}{\partial r}}{\left|\frac{\partial\vec{r}(r,\theta,\phi)}{\partial r}\right|}\,, \vec{e}_\theta = \frac{\frac{\partial\vec{r}(r,\theta,\phi)}{\partial\theta}}{\left|\frac{\partial\vec{r}(r,\theta,\phi)}{\partial\theta}\right|}\,, \vec{e}_\phi = \frac{\frac{\partial\vec{r}(r,\theta,\phi)}{\partial\phi}}{\left|\frac{\partial\vec{r}(r,\theta,\phi)}{\partial\phi}\right|}\,.$$

(ii) Zeigen Sie mit Hilfe der Kettenregel, dass gilt:

$$\nabla_r = \vec{e}_r\cdot\vec{\nabla} = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right|^{-1}\frac{\partial}{\partial r}\,, \quad \nabla_\theta = \vec{e}_\theta\cdot\vec{\nabla} = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right|^{-1}\frac{\partial}{\partial\theta}\,, \quad \nabla_\phi = \vec{e}_\phi\cdot\vec{\nabla} = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi}\right|^{-1}\frac{\partial}{\partial\phi}\,.$$

(iii) Berechnen Sie $\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{e}_r$, $\frac{\partial}{\partial\phi}\vec{e}_r$, $\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{e}_\phi$ und $\frac{\partial}{\partial\phi}\vec{e}_\theta$.

(iv) Bestimmen Sie nun $\triangle = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}$ in Kugelkoordinaten.

(b) Folgen Sie der Vorgehensweise von (a) für Zylinderkoordinaten, und bestimmen Sie den Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten Gl. (2).
