

Zwischenlösungen zu Aufgabe 2:

(b) Potential in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{r}) &= \frac{q}{8\pi\epsilon_0 a} \left[\operatorname{Arsinh}\left(\frac{z+a}{s}\right) - \operatorname{Arsinh}\left(\frac{z-a}{s}\right) \right] \\ &= \frac{q}{8\pi\epsilon_0 a} \ln \left(\frac{z+a + \sqrt{(z+a)^2 + s^2}}{z-a + \sqrt{(z-a)^2 + s^2}} \right)\end{aligned}$$

Äquipotentialflächen: $\Phi(s, z) = \text{const.}$

$\Leftrightarrow$ Argument des $\log = \text{const.}$

$$\frac{z+a + \sqrt{(z+a)^2 + s^2}}{z-a + \sqrt{(z-a)^2 + s^2}} = \text{const.} = c > 0$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$
Def. Bereich $\ln$

Auflösen:

$$\left(\frac{(1-c)s}{2\sqrt{c}a} \right)^2 + \left(\frac{(1-c)z}{a(1+c)} \right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{s^2}{\alpha^2} + \frac{z^2}{\beta^2} = 1 \quad \text{Ellipsengleichung in } (s, z)\text{-Ebene}$$

(C) elektrische Feldlinien:

$$E_g = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 a} \left[\frac{a-z}{\rho\sqrt{\rho^2+(a-z)^2}} + \frac{a+z}{\rho\sqrt{\rho^2+(a+z)^2}} \right]$$

$$E_z = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 a} \left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(a-z)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2+(a+z)^2}} \right]$$

$d\vec{r} \times \vec{E} = 0$ liefert $(E_g dz - E_z d\rho) \vec{e}_\varphi = 0$
(nur (ρ, z) -Ebene: $d\varphi = 0$)

totales Differential, falls $\frac{\partial E_g}{\partial \rho} = - \frac{\partial E_z}{\partial z}$, müßte der Fall

integrierender Faktor: $\rho E_g dz - \rho E_z d\rho = 0$

$$\star F(\rho, z) = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 a} \left(\sqrt{\rho^2+(a-z)^2} - \sqrt{\rho^2+(a+z)^2} \right)$$

Feldlinien: $F(\rho, z) = \text{const.} = \frac{q}{a} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$

wobei $|d| < 1$ ist, da $F(\rho, z) \frac{4\pi\epsilon_0}{q}$
beschränkt auf $[-1, 1]$

auflösen:

$$\frac{z^2}{a^2 d^2} - \underbrace{\frac{\rho^2}{a^2(1-d^2)}}_{>0} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{z^2}{\alpha^2} - \frac{\rho^2}{\beta^2} = 1, \quad \alpha^2, \beta^2 > 0$$

Hyperbelgleichung