Klassische Theoretische Physik III (Theorie C)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. T. Kasprzik, Dr. L. Mihaila
WS 13/14

`http://www.ttp.kit.edu/~kasprzik/theoc/`
Übungsblatt 4

Besprechung: 20.11.2013

Aufgabe 1: Greensche Funktion des harmonischen Oszillators

(a) Die Greensche Funktion $G(t,t')$ für den eindimensionalen (ungedämpften) harmonischen Oszillator erfüllt die Differentialgleichung

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\right) G(t,t') \;=\; \delta(t-t') \tag{1}$$

und verschwindet für $t \leq t'$.

(i) Gehen Sie vom Ansatz $G(t,t') = G(t-t')$ aus und zeigen Sie durch Integration über einen infinitesimalen Bereich um $t = t'$, dass gilt

$$\lim_{\epsilon \to 0} \dot{G}(\epsilon) = 1\,,$$

wobei $\dot{G}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} G(t)$ bezeichnet.

(ii) Bestimmen Sie die Greensche Funktion $G(t,t')$.

Hinweis: Lösen Sie die Differentialgleichung (1) zunächst für $t > t'$. Bestimmen Sie die Integrationskonstanten aus den Anfangsbedinungen.

(b) Bestimmen Sie die Lösung der Bewegungsgleichung des angetriebenen harmonischen Oszillators

$$m\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\right) x(t) \;=\; F(t)\,,$$

für die Kraftfunktion $F(t) \;=\; F_0\, t\, \theta(t)\, \theta(t_0 - t)$ mit $t_0 > 0$. Benutzen Sie dazu die in Teil (a) bestimmte Greensche Funktion und betrachten Sie die Anfangsbedingungen $x(0) = 0\,,\ \dot{x}(0) = 0$.

Hinweis: Behandeln Sie die Fälle $t < t_0$ und $t > t_0$ getrennt voneinander, und bestimmen Sie dann $x(t) = \theta(t_0 - t)x_<(t) + \theta(t - t_0)x_>(t)$ aus $x_<(t_0) = x_>(t_0)$ und $\dot{x}_<(t_0) = \dot{x}_>(t_0)$.

Aufgabe 2 : Greensche Funktion in zwei Dimensionen

Bestimmen Sie die Greensche Funktion $G(\vec{r}, \vec{r}\,')$ in zwei Dimensionen ohne Randbedingungen im Endlichen durch Lösen der Differenzialgleichung

$$\Delta_{\vec{r}}\, G(\vec{r}, \vec{r}\,') = \delta(\vec{r} - \vec{r}\,')\,.$$

Gehen Sie dabei vom Ansatz $G(\vec{r}, \vec{r}\,') = G(|\vec{r} - \vec{r}\,'|)$ aus, der durch die Translations- und Rotationsinvarianz des Laplace-Operators nahegelegt wird.

Hinweise: (i) Der Laplace-Operator in zwei Dimensionen lautet für ebene Polarkoordinaten (ρ, ϕ)

$$\Delta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\,.$$

Bitte wenden!

(ii) Lösen Sie obige Gleichung zunächst für $\rho \neq 0$,

$$\Delta G(\rho) = 0\,,$$

wobei $\rho = |\vec{r} - \vec{r}\,'|$ bezeichnet. Zeigen Sie anschließend mit dem Gaußschen Satz in drei Dimensionen, dass

$$G(\rho) = \frac{1}{2\pi} \ln(c\rho)$$

gilt. Dabei ist c eine unbestimmte Konstante. Verwenden Sie hierbei, dass $\int \mathrm{d}^3r'\,\delta(\vec{r} - \vec{r}\,') = \int \mathrm{d}z$ ist.

Aufgabe 3: Die Poisson-Gleichung der Elektrostatik
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Poisson-Gleichung der Elektrostatik,

$$\Delta\Phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\varrho(\vec{r})\,. \tag{2}$$

Gehen Sie hierzu folgendermaßen vor:
(a) Bestimmen Sie die zugehörige Greensche Funktion $G(\vec{r} - \vec{r}\,')$ als Lösung der Gleichung

$$\Delta_{\vec{r}}\, G(\vec{r} - \vec{r}\,') = \delta(\vec{r} - \vec{r}\,')\,. \tag{3}$$

(i) Berechnen Sie hierzu die Fouriertransformierte $\mathcal{F}[G] \equiv \hat{G}(\vec{k})$, wobei die Fouriertransformierte $\mathcal{F}[f] \equiv \hat{f}(\vec{k})$ einer Funktion $f(\vec{r})$ definiert ist durch

$$\mathcal{F}[f] \equiv \hat{f}(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \mathrm{d}^3r\, f(\vec{r})\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}\,, \tag{4}$$

mit der inversen Transformation

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}] = f(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \mathrm{d}^3k\, \hat{f}(\vec{k})\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}\,. \tag{5}$$

Zeigen Sie hierbei zunächst, dass $\hat{\delta}(\vec{k}) = 1/\sqrt{(2\pi)^3}$ gilt. Wie lautet ferner die Fourier-Darstellung der Delta-Funktion? Überzeugen Sie sich davon, dass Gl. (5) die inverse Fouriertransformation beschreibt, d.h. dass $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} = \mathbb{1}$ gilt.
(ii) Berechnen Sie nun $G(\vec{r} - \vec{r}\,')$ aus Gl. (5). Das auftretende Integral im $\vec{k}$-Raum kann in Kugelkoordinaten gelöst werden, wobei ohne Einschränkung $(\vec{r} - \vec{r}\,') \parallel \vec{e}_z$ angenommen werden kann.
Hinweis: Es gilt $\int_0^\infty \mathrm{d}x \sin(ax)/x = \pi/2$ für $a > 0$.
(b) Bestimmen Sie nun die Lösung von Gl. (2) durch lineare Superposition.
