Klassische Theoretische Physik III (Theorie C)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. T. Kasprzik, Dr. L. Mihaila
http://www.ttp.kit.edu/∼kasprzik/theoc/

WS 13/14
Übungsblatt 5
Besprechung: 27.11.2013

Aufgabe 1: Greensche Funktion & Spiegelladung

Außerhalb einer geerdeten, leitenden Hohlkugel mit Radius a, deren Zentrum bei $\vec{r} = 0$ liegt, befinde sich ein Punktladung q_1 bei $\vec{r}_1$.

(a) Welchen Wert hat das Potential auf der Kugeloberfläche? (Dirichletsche Randbedingung)

(b) Berechnen Sie das Potential im Innen- und Außenraum der Kugel, indem Sie eine geeignete Spiegelladung q_2 bei $\vec{r}_2$ im Inneren der Kugel annehmen. Bestimmen Sie q_2 und $\vec{r}_2$ mit der Randbedingung aus (a).
Hinweis: Als Lösung für das Potential ergibt sich

$$\varphi(\vec{r}, \vec{r}_1) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} - \frac{a}{r_1} \frac{1}{|\vec{r} - (a^2/r_1^2)\, \vec{r}_1|} \right), \quad r > a\,.$$

(c) Berechnen Sie das elektrische Feld, die influenzierte Ladungsdichte und die influenzierte Gesamtladung auf der Kugeloberfläche.

(d) Welche elektrostatische Kraft wirkt auf die Punktladung q_1?

(e) Wie lauten das Potential und die influenzierte Flächenladungsdichte, wenn die physikalische Punktladung im Inneren der Kugel liegt?

(f) Geben Sie die Greensche Funktion an.

Aufgabe 2: Greensche Funktion einer geladenen Hohlkugel

Auf der Oberfläche einer Hohlkugel mit dem Radius a sei das Potential $U(\theta, \phi) \equiv \varphi(a, \theta, \phi)$ vorgegeben.

(a) Bestimmen Sie die Greensche Funktion $G_D(\vec{r}, \vec{r}\,')$ des zugehörigen Dirichletschen Randwertproblems für den Innenraum der Hohlkugel.

(b) Der Innenraum der Hohlkugel sei ladungsfrei. Zeigen Sie mittels des Greenschen Satzes, dass das Potential für $|\vec{r}| = r < a$ in der Form

$$\varphi(r, \theta, \phi) = \frac{a(a^2 - r^2)}{4\pi} \int \mathrm{d}\Omega' \frac{U(\theta', \phi')}{(r^2 + a^2 - 2\,a\,r\,\cos\gamma)^{3/2}} \tag{1}$$

geschrieben werden kann, mit

$$\cos\gamma = \cos\theta\,\cos\theta' + \sin\theta\,\sin\theta'\cos(\phi - \phi')\,.$$

(c) Zeigen Sie für den Spezialfall $U(\theta, \phi) = 1$, dass das Potential aus Gleichung (1) im Limes $r \to a$ stetig ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 3: Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen

(a) Gegeben sei eine Hohlkugel mit dem Radius R und azimuthalsymmetrischer Flächenladungsdichte

$$\sigma(\theta) = \sigma_0(2\cos^2\theta + \cos\theta - \sin^2\theta)\,,$$

mit σ_0 konstant.

(i) Berechnen Sie die Gesamtladung Q der Hohlkugel.

(ii) Berechnen Sie das Potential innerhalb und außerhalb der Kugel.

(b) Die Hohlkugel aus Aufgabenteil (a) sei metallisch und geerdet und befinde sich in einem homogenen elektrischen Feld $\vec{E} = E\vec{e}_z$. Berechnen Sie das Potential $\varphi(\vec{r})$ und die influenzierte Flächenladungsdichte auf der Hohlkugel.

Hinweis: Verwenden Sie die Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen.
