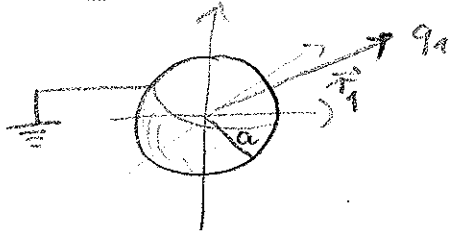


① Green'sche Funktion & Spiegelladung



(a) Potential auf Oberfläche der Kugel (geerdet!)

$$\Phi(\vec{r}=a) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Dirichlet-Bandbedingung} \\ (\text{v. Neumann-BK: } \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{|\vec{r}=a} = \dots) \end{array} \right.$$

(b) Potential innen und außen mit Spiegelladung q_2 bei $\vec{r}_2$:

$$|\vec{r}_1| > a, |\vec{r}_2| < a$$

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\underbrace{\frac{q_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}}_{\text{Punktladung } q_1 \text{ bei } \vec{r}_1} + \underbrace{\frac{q_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|}}_{\text{Punktladung } q_2 \text{ bei } \vec{r}_2} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{wobei } \Delta \left(\frac{q_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|} \right) = 0 \\ \text{außerhalb der Kugel!} \\ (\text{für } |\vec{r}| > a > |\vec{r}_2|) \end{array} \right\}$$

Randbedingung bei $\vec{r} = a \underline{\underline{\vec{e}_r}}$:

$$\Phi(\vec{a}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{|\vec{a}-\vec{r}_1|} + \frac{q_2}{|\vec{a}-\vec{r}_2|} \right) \stackrel{!}{=} 0 \quad (\text{s. (a)})$$

$$\Leftrightarrow \frac{q_1^2}{a^2 + r_1^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{r}_1} = \frac{q_2^2}{a^2 + r_2^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{r}_2}$$

$$\Leftrightarrow (q_1^2 - q_2^2)a^2 - \underbrace{2\vec{a} \cdot (q_1^2 \vec{r}_2 - q_2^2 \vec{r}_1)}_{2a\vec{e}_r \cdot (q_1^2 \vec{r}_2 - q_2^2 \vec{r}_1)} = q_2^2 r_1^2 - q_1^2 r_2^2$$

} Gleichung muss für alle $\vec{e}_r$ gelten (d.h. alle Komb. von $\vec{r}_1, \vec{r}_2$)

$$\textcircled{*} \Rightarrow q_1^2 \vec{r}_2 = q_2^2 \vec{r}_1 \quad \text{und} \quad (q_1^2 - q_2^2)a^2 = q_2^2 r_1^2 - q_1^2 r_2^2$$

$$\Leftrightarrow q_2^2 = q_1^2 \frac{r_2}{r_1} \quad \longrightarrow \quad \left(1 - \frac{r_2}{r_1}\right)a^2 = \frac{r_2}{r_1} r_1^2 - r_2^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{r_1} - a^2 = \left(\frac{a^2}{r_1} + r_1\right) + a^2 = 0$$

$$r_2^2 - r_2 \left(\frac{a^2}{r_1} + r_1 \right) + a^2 = 0 \Rightarrow r_2 = \frac{1}{2} \frac{a^2 + r_1^2}{r_1} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \frac{(a^2 + r_1^2)^2}{r_1^2} - a^2}$$

$$\Rightarrow r_2 = \begin{cases} \frac{1}{2r_1} (a^2 + r_1^2 + a^2 - r_1^2) = \frac{2a^2}{2r_1} \\ \frac{1}{2r_1} (a^2 + r_1^2 - a^2 + r_1^2) = \frac{2r_1^2}{2r_1} = r_1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{4r_1^2} \left(a^4 + r_1^4 + 2a^2 r_1^2 - 4a^2 r_1^2 \right) = \frac{-2a^2 r_1^2}{(a^2 - r_1^2)^2}$$

Zwei Lösungen:

(1) $r_2 = r_1 \rightarrow q_2 = q_1 \Rightarrow \Phi(\vec{r}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_1|}$ erfüllt nicht die BZ, da $\neq 0 \forall \vec{r} \neq \vec{r}_1$

oder $q = 0 \rightarrow \Phi(\vec{r}) = 0 \forall \vec{r}$

(2) $r_2 = \frac{a^2}{r_1} \rightarrow \vec{r}_2 = \frac{a^2}{r_1^2} \vec{r}_1 \Rightarrow \Phi(\vec{a}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{|\vec{a} - \vec{r}_1|} + \frac{q_2}{|\vec{a} - \left(\frac{a^2}{r_1^2}\right) \vec{r}_1|} \right)$

$$|\vec{a} - \frac{a^2}{r_1^2} \vec{r}_1| = \sqrt{a^2 + \frac{a^4}{r_1^2} - \frac{2a^3}{r_1^2} \vec{e}_r \cdot \vec{r}_1} = \left(\frac{a}{r_1} \right) \sqrt{r_1^2 + a^2 - 2a \vec{e}_r \cdot \vec{r}_1}$$

$$= \frac{a}{r_1} |\vec{a} - \vec{r}_1|$$

$$\Rightarrow \Phi(\vec{a}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{a} - \vec{r}_1|} \left(q_1 + \frac{r_1}{a} q_2 \right) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \boxed{q_2 = -\frac{a}{r_1} q_1}$$

dann ist dann

$$\boxed{|\Phi(\vec{r})|_{|\vec{r}| > a} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} - \frac{a}{r_1} \frac{1}{\left| \vec{r} - \frac{a^2}{r_1^2} \vec{r}_1 \right|} \right)}$$

im Inneren der Kugel ist keine Ladung eingeschlossen:

$$\boxed{\Delta\Phi(\vec{r}) = 0} \rightarrow \text{gilt } \forall \vec{r} \text{ mit } |\vec{r}| < a, \text{ Randbed. } \Phi(\vec{a}) = 0$$

$$\hookrightarrow \boxed{|\Phi(\vec{r})|_{|\vec{r}| < a} = 0}$$

(c) elektisches Feld: $\vec{E}(\vec{a}) = -\vec{\nabla} \Phi(\vec{r})|_{\vec{r}=\vec{a}}$

$$\vec{E}(\vec{a}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{a} - \vec{r}_1}{|\vec{a} - \vec{r}_1|^3} - \frac{a}{r_1} \frac{\vec{a} - \frac{a^2}{r_1^2} \vec{r}_1}{\left| \vec{a} - \frac{a^2}{r_1^2} \vec{r}_1 \right|^3} \right) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{a} - \vec{r}_1}{|\vec{a} - \vec{r}_1|^3} - \left(\frac{r_1}{a} \right)^2 \frac{\vec{a} - \frac{a^2}{r_1^2} \vec{r}_1}{|\vec{a} - \vec{r}_1|^3} \right)$$

$$|\vec{a} - \frac{a^2}{r_1^2} \vec{r}_1| = \frac{a}{r_1} |\vec{a} - \vec{r}_1|$$

$$= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{a} - \vec{r}_1|^3} \left(\vec{a} - \left(\frac{r_1}{a} \right)^2 \vec{a} \right) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{a^2 - r_1^2}{|\vec{a} - \vec{r}_1|^3} \frac{1}{a} \vec{e}_r$$

Oberflächenladungsdichte: $\vec{E}_\perp \cdot \epsilon_0$

$$\sigma(\vec{a}) = \vec{e}_r \cdot \vec{E}(\vec{a}) \epsilon_0 = \frac{-q_1}{4\pi a} \frac{r_1^2 - a^2}{|\vec{r}_1 - \vec{a}|^3}$$

influenzierte Gesamtladung: Oberflächenintegral

$$\begin{aligned} q_{\text{infl}} &= a^2 \int d\Omega \sigma(\vec{a}) = -\frac{q_1 a}{2} \int_{-1}^1 d\cos\theta \frac{r_1^2 - a^2}{(r_1^2 + a^2 - 2r_1 a \cos\theta)^{3/2}} \\ &= -\frac{q_1 (r_1^2 - a^2)}{2\pi a} \left(\frac{1}{|r_1 + a|} - \frac{1}{|r_1 - a|} \right) \\ &= -\frac{q_1}{2\pi} \frac{(r_1^2 - a^2) |r_1 - a| - |r_1 + a|}{(r_1^2 - a^2)} = -\frac{q_1 a}{r_1} \equiv q_2 \end{aligned}$$

(d) elektrostatische Kraft: Ladung q_1 als "testladung" (im Feld von q_2)

$$\begin{aligned} \vec{E}_2(\vec{r}) &= \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3} \rightarrow \vec{F} = q_1 \vec{E}_2(\vec{r}_1) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \\ &= -\frac{q_1^2 a}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_1}{(a^2 - r_1^2)^2} \\ q_2 &= -q_1 \frac{a}{r_1} \\ \vec{r}_1 - \vec{r}_2 &= (1 - \frac{a^2}{r_1^2}) \vec{r}_1 \end{aligned}$$

(e) Potential und influenzierte Flächenladungsdichte, wenn $r_1 < a$?

- gleiche Lösung nun für $r < a$ wie vorher für $r > a$
Spiegelladung sitzt außerhalb: $r \rightarrow 2$
- Oberflächenladung gleich bis auf Vorzeichen ($\vec{n} \rightarrow -\vec{n}$)
- $\Phi(\vec{r}) = 0$ für $r > a$

Gesamtladung: $Q = q_2 + \underbrace{q_{\text{infl}}}_{=-q_2} = 0 \rightarrow$ Gaußsches Satz

(f) Greensche Funktion

Lösung aus (b) ist offensichtlich die Lösung zu

$$\Delta \Phi(\vec{r}) = - \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} = - \frac{q_L}{\epsilon_0} \delta(\vec{r} - \vec{r}_1)$$

→ damit ist die Greensche Funktion mit Dirichlet-Bed.:

$$G_D(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{a}{r_1' |\vec{r} - \frac{a^2}{r_1'^2} \vec{r}'|}$$

wobei $G_D(a, \vec{r}') = 0$

$G_D(\vec{r}, \vec{r}')$ ist symmetrisch zu $\vec{r} \leftrightarrow \vec{r}'$

② Greensche Funktion einer geladenen Hohlkugel

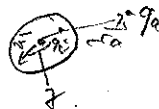
$U(\theta, \varphi) = \Phi(a, \theta, \varphi)$ Potential auf Oberfläche einer Hohlkugel der Radius a

(a)

Dirichlet: $\Phi(\vec{r})|_{r=a} = 0 \quad \oplus$

Analog Aufgabe 1: $\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} + \frac{q_a}{|\vec{r} - \vec{r}_a|} \right)$

$$\left. \begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}_i| &= \sqrt{r^2 + r_i^2 - 2rr_i \cos \gamma} \\ |\vec{r} - \vec{r}_a| &= \sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \cos \gamma} \end{aligned} \right\} \text{ mit } \cos \gamma = \hat{r} \cdot \hat{r}_i$$



$$\Rightarrow \oplus \Rightarrow \frac{q_i/a}{\sqrt{1 + \frac{r_i^2}{a^2} - 2\frac{r_i}{a} \cos \gamma}} = \frac{-q_a/a}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{r_i^2} - 2\frac{a}{r_i} \cos \gamma}} \Rightarrow \begin{cases} q_a = -q \frac{r_i}{a} \\ r_a = \frac{a^2}{r_i} > a \end{cases}$$

$$\Rightarrow G_0(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{\epsilon_0}{q} \Phi|_{\vec{r}' = \vec{r}_i}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_i^2 - 2rr_i \cos \gamma}} - \frac{a/r_i}{\sqrt{r^2 + \frac{a^4}{r_i^2} - 2r\frac{a^2}{r_i} \cos \gamma}} \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_i^2 - 2rr_i \cos \gamma}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{r^2 r_i^2}{a^2} + a^2 - 2rr_i \cos \gamma}} \end{aligned}$$

(b) Innenraum Ladungsfrei

Greenscher Satz = 2. Greensche Identität

$$\int_V dV (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) = \int_{\partial V} dS \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)$$

mit $\psi = G_0 \rightarrow \nabla^2 G_0 = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$ $\rightarrow \int_V dV (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) = \phi(\vec{r}) - \int_V dV G_0 \nabla^2 \phi$

also: $\int_{\partial V} dS \left(\phi \frac{\partial G_0}{\partial n} - G_0 \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) = \int_{\partial V} dS \phi \Big|_0 \frac{\partial G_0}{\partial n}$
 $\uparrow$
 verschwindet auf dem Rand

= 0, da $\phi|_0 = 0$
 www.kit.edu

$$\Phi(\vec{r}) = \int_S d\vec{\sigma}' \underbrace{\Phi(\vec{r}') \frac{\partial G_D}{\partial n'}}_{\text{transmittal}} \Big|_S$$

$$\Phi(\vec{r}') = U(\theta', \varphi')$$

$$\frac{\partial G_D}{\partial n'} = \vec{n}' \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}'} G_D$$

$$\vec{n}' = \frac{\vec{r}'}{r'} = \vec{e}_{r'}$$

$$\rightarrow \frac{\partial G_D}{\partial n'} = \frac{\vec{r}'}{r'} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}'} G_D = \frac{\partial G_D}{\partial r'}$$

$$= \frac{a^2}{4\pi} \int d\Omega' U(\theta', \varphi') \left[\frac{r' - 2r \cos \gamma}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma}^3} - \frac{\frac{r'^2 r'}{a^2} - 2r \cos \gamma}{\sqrt{\frac{r'^2 r'^2}{a^2} + a^2 - 2rr' \cos \gamma}^3} \right]_{r'=a}$$

$$\frac{\partial}{\partial r'} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{r'^2 r'^2}{a^2} + a^2 - 2rr' \cos \gamma}} \right]$$

$$= \frac{1}{2r} \frac{2r' - 2r \cos \gamma}{\sqrt{\quad}^3} - \frac{1}{2} \frac{\frac{2r'^2 r'}{a^2} - 2r \cos \gamma}{\sqrt{\quad}^3}$$

$$= \frac{a^2}{4\pi} \int d\Omega' U(\theta', \varphi') \frac{a - 2r \cos \gamma - \frac{r^2}{a} + 2r \cos \gamma}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \gamma}^3}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int d\Omega' U(\theta', \varphi') \frac{a(a^2 - r^2)}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \gamma}^3}$$

(c) Spezialfall $U(\theta, \varphi) = 1 \xrightarrow{r \rightarrow a} \Phi$ stetig

$$\Phi(r=a, \theta, \varphi) = \lim_{r \rightarrow a} \underbrace{\frac{a(a^2 - r^2)}{4\pi}}_{\rightarrow 0 \text{ für } r \rightarrow a} \int d\Omega' \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \gamma}^3}$$

kugelsymmetrische Symmetrie: θ und φ egal $\rightarrow \theta = 0, \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$ (nur divergent, wenn $\gamma = 1$, also $\vec{r} \parallel \vec{r}'$)

$$\Phi(\vec{r}, \theta, \varphi) = \frac{a(a^2 - r^2)}{2} \int_{-1}^1 d\cos \theta \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \gamma}^3}$$

$$\stackrel{r < a}{=} \frac{-1}{2ar} \left[\frac{1}{1r - a1} - \frac{1}{1r + a1} \right] = \frac{-1}{2ar} \frac{r+a+r-a}{r^2 - a^2}$$

$$= \frac{a(a^2 - r^2)}{2} \left(\frac{-1}{2ar} \right) \frac{2r}{r^2 - a^2} = 1 \xrightarrow{r \rightarrow a} 1 = U(\theta, \varphi)$$

③ Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen

(a) Azimutalsymmetrische Flächenladungsdichte

$$\sigma(\theta) = \sigma_0 (2 \cos^2 \theta + \cos \theta - \sin^2 \theta)$$

(v) Gesamtladung der Kugel: $Q = \int d\Omega R^2 \sigma(\theta) = 2\pi R^2 \int_{-1}^1 d\cos\theta \sigma(\theta)$

$$Q = 2\pi R^2 \sigma_0 \int_{-1}^1 d\cos\theta \left[2 \cos^2 \theta + \cos \theta - \underbrace{\sin^2 \theta}_{(1 - \cos^2 \theta)} \right]$$

$$\left. \frac{2}{3} \cos^3 \theta + \frac{1}{2} \cos^2 \theta - \cos \theta + \frac{1}{3} \cos^3 \theta \right|_{-1}^1 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{3} = 2 - 2 = 0$$

(ii) Potential innerhalb und außerhalb:

Nebenbedingungen:

- $\Phi(r=0)$ nicht singular

- $\Phi(r \rightarrow \infty) = 0$

- Φ stetig bei $r=R$

- Grenzfläche: $\vec{n} \cdot (\vec{E}_< - \vec{E}_>) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ (Jackson eq. (1.22) und Bsp. 1.4)

Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen:

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l,m} \left[A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)} \right] Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

- $r < R$: $\Phi_< = \sum_{lm} A_{lm} r^l Y_{lm}(\theta, \varphi)$

- $r > R$: $\Phi_> = \sum_{lm} B_{lm} r^{-(l+1)} Y_{lm}(\theta, \varphi)$

- Stetigkeit: $A_{lm} R^l = B_{lm} R^{-l-1} = \frac{a_{lm}}{R}$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Phi_< = \sum_{lm} a_{lm} \left(\frac{r}{R} \right)^l \frac{1}{R} Y_{lm} \\ \Phi_> = \sum_{lm} a_{lm} \left(\frac{r}{R} \right)^{-(l+1)} \frac{1}{R} Y_{lm} \end{array} \right\} \Rightarrow \Phi = \frac{1}{r} \sum_{lm} a_{lm} \left(\frac{r_<}{r_>} \right)^l Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

wobei $r_< = \min(r, R)$
und $r_> = \max(r, R)$

a_{lm} ?

$$\sigma(\theta) = -\epsilon_0 \left[\underbrace{\frac{\partial \Phi_{>}}{\partial r}}_{= -E_{r, >}} - \frac{\partial \Phi_{<}}{\partial r} \right]_{r=R} = -\epsilon_0 \sum_{l,m} a_{lm} \left[-l+1 \frac{r^{<}}{r^{<+2}} - l \frac{r^{<}}{r^{<+1}} \right]_{r=R} \\ = \frac{\epsilon_0}{R^2} \sum_{l,m} (2l+1) a_{lm} Y_{lm} \quad (r^{<} = r = R)$$

auflösen nach $a_{lm} \hookrightarrow$ Orthogonalität ausnutzen

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d\cos\theta Y_{l'm'}^*(\theta, \varphi) Y_{lm}(\theta, \varphi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d\cos\theta Y_{l'm'}^*(\theta, \varphi) \sigma(\theta) = \frac{\epsilon_0}{R^2} \sum_{l,m} (2l+1) a_{lm} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d\cos\theta Y_{l'm'}^* Y_{lm}}_{\delta_{ll'} \delta_{mm'}} \\ = \frac{\epsilon_0}{R^2} (2l'+1) a_{l'm'}$$

$$\Rightarrow a_{lm} = \frac{R^2}{\epsilon_0 (2l+1)} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d\cos\theta Y_{lm}^*(\theta, \varphi) \sigma(\theta, \varphi)$$

azimutale Symmetrie: Φ unabh. von φ

gilt für beliebige
Oberflächenladung-
verteilungen

$$Y_{l0} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos\theta) \quad \hookrightarrow \underline{m=0}$$

Legendre-Polynom:

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x \\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \end{cases}$$

$$\sigma(\theta)/\epsilon_0 = 2\cos^2\theta + \cos\theta - (1 - \cos^2\theta) \\ = 3\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 3P_2(\cos\theta) + P_1(\cos\theta)$$

Orthogonalitätsrelation f. Legendre-Polynome: $\int_{-1}^1 dz P_l(z) P_{l'}(z) = \frac{2\delta_{ll'}}{2l+1}$

$$a_{l0} = \frac{2\pi \epsilon_0 R^2}{\epsilon_0 (2l+1)} \int_{-1}^1 dz \left[3P_2(z) + P_1(z) \right] \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(z)$$

$$= \frac{2\pi}{2l+1} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \frac{\epsilon_0 R^2}{\epsilon_0} \left[\frac{4}{2l+1} \delta_{l2} + \frac{2}{2l+1} \delta_{l1} \right] = \frac{1}{2l+1} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \frac{\epsilon_0 R^2}{\epsilon_0} [2\delta_{l2} + \delta_{l1}]$$

$$\Phi = \frac{1}{r} \sum_{l,m} a_{lm} \left(\frac{r}{r_0} \right)^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos\theta)$$

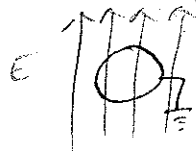
$$a_{l0} = \frac{1}{2l+1} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \frac{\epsilon_0 R^2}{\epsilon_0} [2\delta_{l2} + \delta_{l1}]$$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{\epsilon_0 R^2}{\epsilon_0} \frac{1}{r} \sum_l \left(\frac{r}{r_0} \right)^l \frac{1}{2l+1} (2\delta_{l2} + \delta_{l1}) P_l(\cos\theta)$$

innen: $\Phi_i = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0} R \left[\left(\frac{r}{R} \right)^2 \frac{2}{5} P_2(\cos\theta) + \left(\frac{r}{R} \right) \frac{1}{3} P_1(\cos\theta) \right]$

außen: $\Phi_a = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0} \frac{R^2}{r} \left[\left(\frac{R}{r} \right)^2 \frac{2}{5} P_2(\cos\theta) + \left(\frac{R}{r} \right) \frac{1}{3} P_1(\cos\theta) \right]$

(b) Hohlkugel metallisch, geerdet, im homogenen Feld $\vec{E} = E \vec{e}_z$



neue Randbedingungen:

- $\Phi(r=0)$ nicht singular
- $\Phi_i(r=R) = \Phi_a(r=R) = 0$ (geerdet)
- Potential verschwindet schnell für $r \rightarrow \infty$

azimutale Symmetrie $\Phi_i(r, \theta) = \sum_l (2l+1) A_l r^l P_l(\cos\theta)$ (azimutale Symmetrie und Verhalten für $r \rightarrow \infty$)

mit $\Phi_i(R, \theta) = 0 \rightarrow A_l = 0 \Rightarrow \Phi_i(r, \theta) = 0$

außen: $\Phi_a(r, \theta) = \sum_l (2l+1) [C_l r^l + D_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos\theta)$

$\Phi_a(R, \theta) = 0 \Rightarrow C_l R^l = -D_l R^{-(l+1)} \Rightarrow \frac{C_l}{R}$

$\Rightarrow \Phi_a(r, \theta) = \sum_l (2l+1) \frac{1}{R} C_l \left[\left(\frac{r}{R} \right)^l - \left(\frac{R}{r} \right)^{l+1} \right] P_l(\cos\theta)$

bestimme C_l aus $\Phi_a(r \rightarrow \infty, \theta) = -Ez = -Er \cos\theta = -Er P_1(\cos\theta)$

$$\sum_l (2l+1) \frac{C_l}{R} \left(\frac{r}{R} \right)^l P_l(\cos\theta)$$

$\Rightarrow (2l+1) \frac{C_l}{R} \left(\frac{r}{R} \right)^l = -E \delta_{l1} \Rightarrow C_l = -\frac{ER^2}{(2l+1)} \delta_{l1} = -\frac{ER^2}{3} \delta_{l1}$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi_a(r, \theta) = -ER \left(\frac{r}{R} - \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \theta}$$

influenzierte Flächenladung:

$$\begin{aligned} \sigma &= \epsilon_0 \vec{n} \cdot (\underbrace{\vec{E}_a - \vec{E}_i}_{\parallel 0}) = \epsilon_0 \vec{n} \cdot \vec{E}_a = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \Phi_a}{\partial n} \right|_{r=R} \cos \theta \\ &= \epsilon_0 ER \left(\frac{1}{R} + 2 \frac{R^2}{r^3} \right) \bigg|_{r=R} \cos \theta \\ &= \underline{\underline{3 \epsilon_0 E \cos \theta}} \end{aligned}$$