Klassische Theoretische Physik III (Theorie C)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. T. Kasprzik, Dr. L. Mihaila
http://www.ttp.kit.edu/∼kasprzik/theoc/

WS 13/14
Übungsblatt 6
Besprechung: 4.12.2013

Aufgabe 1: Punktladung und Dielektrikum

Der rechte Halbraum ($x > 0$) sei von einem Dielektrikum mit $\epsilon > \epsilon_0$ ausgefüllt. Im Vakuumbereich ($x < 0$) befinde sich eine Punktladung der Stärke q bei $-a\vec{e}_x$.

(a) Welchen allgemeinen Stetigkeitsbedingungen müssen die Felder $\vec{E}$ und $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ an Grenzflächen bei Abwesenheit freier Ladungen genügen?

(b) Berechnen Sie das elektrostatische Feld im gesamten Raum.
Anleitung: Gesucht ist eine Lösung der Grundgleichungen

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} &= q/\epsilon_0\,\delta(\vec{r}+a\vec{e}_x)\,, & \vec{\nabla}\times\vec{E} &= 0 \quad \text{für} \quad x<0\,,\\ \vec{\nabla}\cdot\vec{D} &= 0\,, & \vec{\nabla}\times\vec{E} &= 0 \quad \text{für} \quad x>0\,. \end{aligned}$$

Zusätzlich müssen die Stetigkeitsbedingungen aus (a) bei $x = 0$ erfüllt sein. Nehmen Sie zur Lösung des Problems eine Spiegelladung q' bei $+a\vec{e}_x$ und eine weitere Spiegelladung q'' bei $-a\vec{e}_x$ an. Dies führt zu folgendem Ansatz für das elektrische Feld:

$$4\pi\epsilon_0\,\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} q\dfrac{\vec{r}+a\vec{e}_x}{|\vec{r}+a\vec{e}_x|^3} + q'\dfrac{\vec{r}-a\vec{e}_x}{|\vec{r}-a\vec{e}_x|^3} & \text{für} \quad x<0 \\ q''\dfrac{\vec{r}+a\vec{e}_x}{|\vec{r}+a\vec{e}_x|^3} & \text{für} \quad x>0 \end{cases}$$

Man sieht leicht, dass dieser Ansatz obige Gleichungen für beliebige q' und q'' löst. Bestimmen Sie mit den Stetigkeitsbedingungen die Ladungen q' und q''.

(c) Geben Sie die auf der Grenzfläche induzierte Ladungsdichte $\varrho_{\text{ind}} = \sigma_{\text{ind}}\,\delta(x)$ und die zugehörige Gesamtladung q_{ind} an.
Hinweis: Berechnen Sie zunächst die elektrische Polarisation $\vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0)\vec{E}$ und verwenden Sie dann $\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = -\varrho_{\text{ind}}$ und den Gaußschen Satz.

(d) Betrachten Sie die Grenzfälle $\epsilon = \epsilon_0$ und $\epsilon \to \infty$.

Aufgabe 2: Homogen polarisierte Kugel

Es soll das elektrische Feld $\vec{E}$ einer homogen polarisierten Kugel ($\vec{P}(\vec{r}) = P_0\vec{e}_z\,\theta(R-r)$) mit Radius R bei Abwesenheit externer Ladungen berechnet werden.

(a) Berechnen Sie zunächst das elektrostatische Potential mittels

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \mathrm{d}^3r'\,\frac{\vec{P}(\vec{r}\,')\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,.$$

Hinweis: Das Potential kann durch den Gradienten des Integrals $\int_{r'<R}\mathrm{d}^3r'/|\vec{r}-\vec{r}\,'|$ ausgedrückt werden, das in der Vorlesung berechnet wurde (vgl. homogen geladene Kugel).

(b) Berechnen Sie das elektrische Feld im Innen- und Außenraum, skizzieren Sie den Feldverlauf, und interpretieren Sie das Ergebnis.

(c) Berechnen Sie die induzierte Ladungsdichte $\varrho_{\text{ind}} = \sigma_{\text{ind}}\,\delta(r-R)$. Beachten Sie dabei, dass $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$ für $r < R$ und $r > R$. Was ist die induzierte Gesamtladung?

Bitte wenden!

Zusatzaufgabe: Greensche Funktion in 2 Dimensionen II

Analog zu dem Fall in 3 Dimensionen (Übungsblatt 4, Aufgabe 3) kann auch die Greensche Funktion des Laplace-Operators in 2 Dimensionen (Übungsblatt 4, Aufgabe 2) durch Fouriertransformation bestimmt werden, ohne dass dabei die Rotationsinvarianz explizit ausgenutzt werden muss. Man findet die Fourierdarstellung

$$G(\vec{r}-\vec{r}\,') = -\frac{1}{(2\pi)^2}\int \mathrm{d}^2k \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}\,')}}{k^2}$$

für die Greensche Funktion, mit $k = |\vec{k}|$.

(a) Lösen Sie dieses Integral in ebenen Polarkoordinaten.

(i) Führen Sie zuerst die k-Integration aus. Die k-Integration ist logarithmisch divergent für $k \to 0$. Führen Sie den infinitesimalen Regulator ϵ gemäß $\int_0^\infty \mathrm{d}k \to \int_\epsilon^\infty \mathrm{d}k$ ein, mit $0 < \epsilon \ll 1$, und verwenden Sie die Beziehung

$$-\int_\epsilon^\infty \frac{\cos x \,\mathrm{d}x}{x} = \gamma_E + \ln\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)\,, \quad \text{mit} \quad \gamma_E = 0.5772156649\ldots\,.$$

(ii) Führen Sie nun die ϕ-Integration aus. Beachten Sie hierbei, dass

$$\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\phi \ln\cos\phi = -\frac{\pi}{2}\ln 2 \quad \text{und} \quad \ln(-x) = \ln x + \mathrm{i}\pi \quad \text{für} \quad x > 0\,.$$

(b) Addieren Sie zu der (formal divergenten) Funktion $G(\rho)$ (mit $\rho \equiv |\vec{r}-\vec{r}\,'|$) eine Konstante und bestimmen Sie diese durch die Randbedingung $G(\rho_0) = 0$. Überzeugen Sie sich, dass die die Randbedingung erfüllende Greensche Funktion im Limes $\epsilon \to 0$ endlich ist.

Hinweis: Bei der Berechnung des Integrals müssen Terme, die nicht von ρ abhängen, *nicht* explizit berechnet werden.
