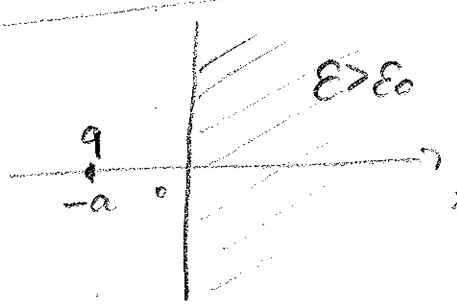
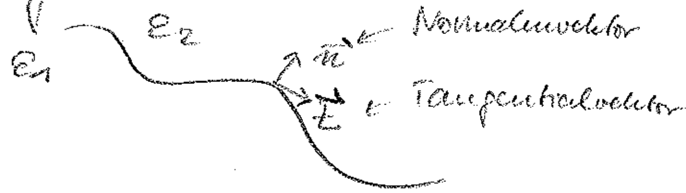
Theoretische Physik C – WS 2013/14

6. Übungsblatt

(1) Punktladung und Dielektrikum



allgemeine Situation:



(a) Stetigkeitsbedingungen der Felder $\vec{E}$ und $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$:

(i) im gesamten Raum gilt: $\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0}$ (Elektrostatik!)

Stokes: $\int_S \vec{\nabla}\times\vec{E}\, d\vec{a} = \oint_{\partial S} \vec{E}\cdot d\vec{l}$

S: beliebige (offene) Fläche; ∂S: Rand der Fläche; $d\vec{l}$: Linienelement (Vektor liegt in der betrachteten Fläche $\rightarrow d\vec{l} \sim \vec{t}$ Tangentenvektor).

wegen $\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$ gilt $(\vec{E}_1 - \vec{E}_2)\cdot\vec{t} = 0$ für alle Vektoren $\vec{t}$ $\Rightarrow$ die <u>Tangentialkomponente</u> des $\vec{E}$-Feldes ist stetig: $\vec{E}_{1,\parallel} = \vec{E}_{2,\parallel}$

(ii) keine Polarisationsladungen: $\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = 0}$

Gauß: $\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{D}\, dV = \int_{\partial V} \vec{D}\cdot d\vec{a}$, $d\vec{a} \sim \vec{n}$ (Normalenvektor der Grenzfläche)

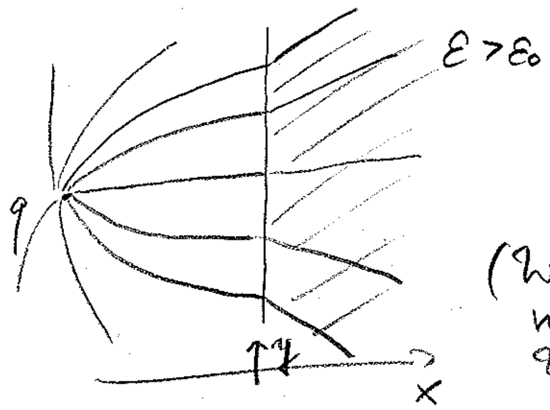
$\Rightarrow (\vec{D}_1 - \vec{D}_2)\cdot\vec{n} = 0$ $\Rightarrow$ die <u>Normalkomponente</u> der $\vec{D}$-Felder ist stetig. ($\vec{D}_{1,\perp} = \vec{D}_{2,\perp}$)

[im Allgemeinen gilt $(\vec{D}_2 - \vec{D}_1)\cdot\vec{n} = \sigma$ (Flächenladungsdichte)]

Anmerkung: $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon\vec{E}$, wobei ε i.A. ein <u>Tensor</u> ist,
ist die „dielektrische Verschiebung" als Linearkombination vom mikroskopischen $\vec{E}$-Feld, das von den elektrischen Ladungen erzeugt wird, und Polarisation, die Ladungsverschiebungen im Medium beschreibt.

$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$ gilt allgemein, da elektrische Felder wirbelfrei sind.
$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$ für Ladungsfreiheit gilt im Medium nicht mehr, da nicht zwangsweise $\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = 0$ gilt (bei nicht-homogener Polarisation)
[Jackson Kap. 4.3]

(b) gesucht ist das elektrostatische Feld im gesamten Raum:



(warum werden die $\vec{E}$-Feldlinien von der Normalenrichtung weggebrochen?)

Ansatz:

$$4\pi\varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} q \dfrac{\vec{r}+a\vec{e}_x}{|\vec{r}+a\vec{e}_x|^3} + q' \dfrac{\vec{r}-a\vec{e}_x}{|\vec{r}-a\vec{e}_x|^3} & , x<0 \\ q'' \dfrac{\vec{r}+a\vec{e}_x}{|\vec{r}+a\vec{e}_x|^3} & , x>0 \end{cases}$$

Stetigkeitsbedingungen:

(i) $\vec{e}_y \cdot \vec{E}_< = \vec{e}_y \cdot \vec{E}_>$: $\quad \dfrac{q}{\sqrt{1+a^2}^3} + \dfrac{q'}{\sqrt{1+a^2}^3} = \dfrac{q''}{\sqrt{1+a^2}^3}$

$$\Leftrightarrow \boxed{q'' = q + q'} \quad (*)$$

(ii) $\vec{e}_x \cdot \vec{D}_<(x=0) = \vec{e}_x \cdot \vec{D}_>(x=0)$: $\quad \varepsilon_0\left(\dfrac{qa}{|a|^3} - \dfrac{q'a}{|a|^3}\right) = \varepsilon \dfrac{q''a}{|a|^3}$

$$\Leftrightarrow \boxed{q'' = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}(q - q')} \quad (**)$$

$(*)$ & $(**)$ $\Rightarrow$ $\quad q'\underbrace{\left(\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon}+1\right)}_{\frac{\varepsilon_0+\varepsilon}{\varepsilon}} = \underbrace{\left(\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon}-1\right)}_{\frac{\varepsilon_0-\varepsilon}{\varepsilon}} q \Rightarrow \boxed{q' = -\underbrace{\dfrac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}}_{>0} q}$

$$q'' = q + q' = \left(1 - \frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}\right) q = \boxed{\frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0} q = q''}$$

Polarisation $\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E}$:

$$\vec{P}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 \quad \text{für } x<0 \text{ da } \varepsilon = \varepsilon_0 \\ \dfrac{q''}{4\pi\varepsilon_0}(\varepsilon-\varepsilon_0)\dfrac{\vec{r}+a\vec{e}_x}{|\vec{r}+a\vec{e}_x|^3} = \dfrac{q}{2\pi}\dfrac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}\dfrac{\vec{r}+a\vec{e}_x}{|\vec{r}+a\vec{e}_x|^3} \quad \text{für } x>0 \end{cases}$$

oder: $\boxed{\vec{P}(\vec{r}) = \dfrac{q}{2\pi}\dfrac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}\dfrac{\vec{r}+a\vec{e}_x}{|\vec{r}+a\vec{e}_x|^3}\Theta(x)}$

Karlsruher Institut für Technologie

Bl. 6 / A 1 |

(c) induzierte Ladungsdichte $\rho_{ind} = \sigma_{ind}\,\delta(x)$ und zugehörige Gesamtladung q_{ind}

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = -\rho_{ind} \quad (\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=0), \quad \vec{P}(\vec{r}) = \frac{q}{2\pi}\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}\frac{\vec{r}+a\vec{e}_x}{|\vec{r}+a\vec{e}_x|^3}\,\Theta(x)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = \underbrace{\Theta'(x)}_{\delta(x)}\,\vec{e}_x\cdot\left[\frac{q}{2\pi}\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}\frac{\vec{r}+a\vec{e}_x}{|\vec{r}+a\vec{e}_x|^3}\right] + \Theta(x)\,\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\left[\frac{q}{2\pi}\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}\frac{\vec{r}+a\vec{e}_x}{|\vec{r}+a\vec{e}_x|^3}\right]}_{=0 \text{ auf der Grenzfläche } (q \text{ bei } -a\vec{e}_x)}$$

$$= \delta(x)\frac{q}{2\pi}\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}\frac{a}{\sqrt{x^2+y^2+a^2}^3} = -\delta(x)\,\sigma_{ind}(x,y)$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_{ind}(\rho) = -\frac{q}{2\pi}\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}\frac{a}{\sqrt{\rho^2+a^2}^3}}$$

$$q_{ind} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} d\rho\, \rho\,\sigma_{ind}(\rho) = +q\,\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}\frac{a}{\sqrt{\rho^2+a^2}}\Bigg|_0^{\infty} = \boxed{\underbrace{-q\,\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}}_{=q'} = q_{ind}}$$

(d) Grenzfälle

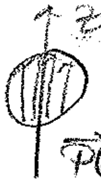
(i) $\underline{\varepsilon=\varepsilon_0}$: $q'=0$, $q''=q$ $\Rightarrow$ eine Ladung bei $\vec{r}=-a\vec{e}_x$

(ii) $\varepsilon\to\infty$: $q'=-q$, $q''=0$ $\Rightarrow$ idealer Leiter bei $x>0$
$\to$ el. Feld verschw. für $x>0$

wegen $\vec{E}_{\parallel}$ stetig $\to$ $\vec{E}_{\parallel}=0$ (Tangentialkomponente des $\vec{E}$-Feldes verschwindet)

$\Rightarrow$ $\vec{E}\perp(y,z)$-Ebene !

② Homogen polarisierte Kugel



$$\vec{P}(\vec{r}) = P_0 \vec{e}_z\, \Theta(R-r)$$

ohne externe Ladungen

(a) elektrostatisches Potential:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \frac{\vec{P}(\vec{r}')\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = \frac{P_0 \vec{e}_z}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r'<R} d^3r' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \vec{P}_0 \cdot \vec{\nabla}_r \underbrace{\int_{r'<R} d^3r' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}_{\text{Gradient des Potentials einer homogen geladenen Kugel, Ladung } Q = \rho \frac{4}{3}\pi R^3} \quad, \text{wobei } \vec{P}_0 = P_0 \vec{e}_z$$

$$\Phi(\vec{r}) = -\frac{1}{3\varepsilon_0} \vec{P}_0 \cdot \vec{\nabla} \begin{cases} 3R^2/2 - r^2/2 & , r \le R \\ R^3/r & , r > R \end{cases}$$

$$= \frac{1}{3\varepsilon_0} \vec{P}_0 \cdot \vec{e}_r \begin{cases} r \\ R^3/r^2 \end{cases}$$

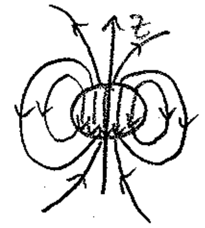
def. Dipolmoment $\vec{p} = \int d^3r\, \vec{P}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{3} R^3 \vec{P}_0$

$$\rightarrow \Phi(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{1}{3\varepsilon_0} \vec{P}_0 \cdot \vec{r} & , r \le R \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} & , r > R \end{cases}$$

homogenes $\vec{E}$-Feld innerhalb der Kugel
Richtung entgegen Polarisation

(b) elektrisches Feld: $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi \rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P}_0 & , r \le R \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\Big(3\underbrace{\frac{\vec{r}(\vec{r}\cdot\vec{p})}{r^2}}_{\vec{e}_r(\vec{e}_r\cdot\vec{p})} - \vec{p}\Big) & , r > R \end{cases}$

Dipolfeld eines Dipols $\vec{p}$



(Feldlinien innen u. außen entgegengerichtet!
→ Dipol hat positive Ladung in +z-Richtung, negative in −z-Richtung sitzen!)

(c) induzierte Ladungsdichte $\rho_{ind} = \sigma_{ind}\, \delta(r-R) = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = \vec{P}_0 \cdot \vec{\nabla}\,\Theta(R-r) = -\delta(R-r)\underbrace{\vec{e}_r\cdot\vec{P}_0}_{\vec{e}_r\cdot\vec{e}_z P_0 = \cos\theta} \quad (\vec{P}_0 \text{ const.}, \vec{\nabla}\cdot\vec{P}_0 = 0) \quad \vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= -P_0 \cos\theta\, \delta(R-r) \equiv -\sigma_{ind}\, \delta(R-r)$$

damit ist die induzierte Flächenladungsdichte $\sigma_{ind} = P_0 \cos\theta$

→ die induzierte Gesamtladung ist Null! $\left(\int d\cos\theta\, \sigma_{ind} = 0\right)$
(außerdem ist ja $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$ innen u. außen)

Karlsruher Institut für Technologie

Zusatzaufgabe Blatt 6

Greensche Funktion in zwei Dimensionen

Teil II

Fourierdarstellung: $G(\vec{r}-\vec{r}\,') = -\frac{1}{(2\pi)^2}\int d^2k \, \frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}}{k^2}$

(a) ebene Polarkoordinaten: $d^2k = k\,dk\,d\varphi$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} dk \, \frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}}{k} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{2\pi} d\varphi \underbrace{\int_{\varepsilon}^{\infty} dk \, \frac{e^{ik\rho\cos\varphi}}{k}}_{\underbrace{\int_{\varepsilon}^{\infty} dk \, \frac{\cos(k\rho\cos\varphi)}{k}}_{\int_{\varepsilon\rho\cos\varphi}^{\infty} d\eta \, \frac{\cos(\eta)}{\eta}} - i \underbrace{\int_{\varepsilon}^{\infty} dk \, \frac{\sin(k\rho\cos\varphi)}{k}}_{\to \frac{\pi}{2} \text{ f. } \varepsilon\to 0}}$$

$\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,') = k\rho\cos\varphi$

$\rho = |\vec{r}-\vec{r}\,'| > 0$

$k\rho\cos\varphi \equiv \eta$

$d\eta = \rho\cos\varphi\, dk$

(Blatt 4!)

$$= -\gamma_E + \ln(\varepsilon\rho\cos\varphi) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$\Rightarrow G_\varepsilon(\vec{r}-\vec{r}\,') = +\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \left[\cancel{\gamma_E} + \ln(\varepsilon\rho\cos\varphi) + \cancel{\frac{\pi}{2}} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\right)$$

Konstanten für Greensche Funktion irrelevant!

$$\ln(\varepsilon\rho\cos\varphi) = \begin{cases} \ln(\varepsilon\rho) + \ln(\cos\varphi) & \text{für } \cos\varphi > 0 \\ \ln(\varepsilon\rho) + \underbrace{\ln|\cos\varphi| + i\pi}_{\ln(\cos\varphi)} & \text{für } \cos\varphi < 0 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\ln(\varepsilon\rho) + \cancel{\frac{1}{(2\pi)^2}\underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \ln(\cos\varphi)}_{\text{const.}}}$$

(b)

$$\Rightarrow G_\varepsilon(\vec{r}-\vec{r}\,') = G_\varepsilon(\rho) = \frac{1}{2\pi}\ln(\varepsilon\rho) + C \quad , \quad G_\varepsilon(\rho_0) \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow C = -\frac{1}{2\pi}\ln(\varepsilon\rho_0)$$

$$\Rightarrow G(\rho) = \frac{1}{2\pi}\left[\underbrace{\ln(\varepsilon\rho) - \ln(\varepsilon\rho_0)}_{\ln\left(\frac{\varepsilon\rho}{\varepsilon\rho_0}\right)}\right] = \boxed{\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)}$$

unabh. von ε und endl. f. $\varepsilon\to 0$