Klassische Theoretische Physik III (Theorie C)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. T. Kasprzik, Dr. L. Mihaila
`http://www.ttp.kit.edu/~kasprzik/theoc/`

WS 13/14
Übungsblatt 7
Besprechung: 11.12.2013

Die erste Übungsklausur wird am 18.12.2013 in den Tutorien geschrieben. Die Klausur muss in dem Tutorium geschrieben werden, in dem die/der Studierende offiziell angemeldet ist. Es sind *keine* Hilfsmittel zugelassen.

Aufgabe 1: Sphärische Multipolentwicklung

Gegeben sei folgende Ladungsverteilung

$$\varrho(\vec{r}) \quad = \quad \frac{q}{64\pi a_0^5} r^2 e^{-r/a_0} \sin^2\theta \,, \quad a_0 > 0 \,.$$

(a) Berechnen Sie alle sphärischen Multipolmomente für die obige Ladungsverteilung.

(b) Entwickeln Sie das Potential für große r ($r \gg a_0$) nach Legendre-Polynomen. Interpretieren Sie das Ergebnis. Wie lauten die Gesamtladung und die kartesischen Multipolmomente?
Hinweis: Verwenden Sie die Entwicklung

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta',\phi') Y_{lm}(\theta,\phi) \,,$$

mit $r_< = \min(r, r')$, $r_> = \max(r, r')$.

(c) Zeigen Sie, dass in der Nähe von $r = 0$ ($r \ll a_0$) das Potential näherungsweise geschrieben werden kann als

$$\varphi(\vec{r}) \quad \approx \quad \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a_0} \left[\frac{1}{4} - \frac{r^2}{120 a_0^2} P_2(\cos\theta) \right] \,,$$

wobei Terme der $\mathcal{O}(r^4)$ vernachlässigt wurden und $P_2(x) = (3x^2-1)/2$ das 2-te Legendre-Polynom bezeichnet.

Aufgabe 2: Zylinderförmiger Hohlleiter

Durch einen langen zylinderförmigen Hohlleiter mit innerem Radius R_i und äußerem Radius R_a fließt der Strom I. Die Stromdichte in dem Leiter sei konstant.
(a) Bestimmen Sie mittels des Biot–Savart-Gesetzes die magnetische Induktion $\vec{B}(\vec{r})$
(i) im Hohlraum $r < R_i$, (ii) im Leiter $R_i < r < R_a$, (iii) im Außenraum $r > R_a$.
(b) Benutzen Sie nun die Maxwell-Gleichungen und einfache Symmetrieüberlegungen, um die magnetische Induktion $\vec{B}(\vec{r})$ in den drei Bereichen auszurechnen.

Bitte wenden!

Aufgabe 3: Kreisförmige Leiterschleife

(a) Berechnen Sie die magnetische Induktion einer kreisförmigen Leiterschleife mit Radius R, die vom Strom I durchflossen wird, für einen Punkt auf der Achse der Schleife im Abstand z vom Mittelpunkt. Diskutieren Sie die Grenzfälle $|z| \ll R$ und $|z| \gg R$.
Hinweis : Benutzen Sie dazu das Biot–Savart-Gesetz.
(b) Bestimmen Sie die magnetische Induktion auf der Achse einer sehr langen, sehr dicht gewickelten Spule der Länge L, Radius R und Windungszahl N, die vom Strom I durchflossen wird.
Hinweis: Verwenden Sie das Resultat aus (a) und das Superpositionsprinzip für die magnetische Induktion.

Aufgabe 4: Kraft auf lokale Stromverteilung

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Kraft, die auf eine Stromdichte $\vec{j}(\vec{r}\,)$ ausgeübt wird, durch folgende Formel gegeben ist

$$\vec{F} \;=\; \int \mathrm{d}^3r'\, \vec{j}(\vec{r}\,'\,) \times (\vec{r}\,' \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}})\vec{B}(\vec{r}\,)|_{\vec{r}=0} + \ldots . \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass Gl. (1) umgeschrieben werden kann in

$$\vec{F} \;=\; \frac{1}{2}\int \left[\mathrm{d}^3r'\,(\vec{r}\,' \times \vec{j}(\vec{r}\,'\,)) \times \vec{\nabla}_{\vec{r}}\right] \times \vec{B}(\vec{r}\,)|_{\vec{r}=0} + \ldots .$$
