Klassische Theoretische Physik III (Theorie C)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. T. Kasprzik, Dr. L. Mihaila
`http://www.ttp.kit.edu/~kasprzik/theoc/`

WS 13/14
Übungsblatt 8
Besprechung: 08.01.2014

Aufgabe 1: Magnetisierte Kugel

Eine Kugel mit Radius R sei im Inneren homogen magnetisiert, $\vec{M} = M_0\,\vec{e}_z$. Innerhalb und außerhalb der Kugel sei $\vec{j} = 0$ (keine freien Ströme).
(a) Wie lauten die Stetigkeitsbedingungen der Felder $\vec{B}$ und $\vec{H}$ an Grenzflächen bei Abwesenheit freier Ströme?
(b) Aufgrund der Maxwell-Gleichung $\vec{\nabla}\times\vec{H} = 0$ kann man das Magnetfeld $\vec{H}$ folgendermaßen schreiben

$$\vec{H} \quad = \quad -\vec{\nabla}\,\varphi_m\,,$$

wobei φ_m das magnetische (Skalar-)Potential genannt wird. Aus $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ folgt $\vec{\nabla}\cdot\vec{M} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{H} = \Delta\varphi_m$ und somit kann $\varphi_m(\vec{r}\,)$ durch folgendes Integral berechnet werden

$$\varphi_m(\vec{r}\,) = -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}_{\vec{r}}\cdot\int \mathrm{d}^3r'\,\frac{\vec{M}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,.$$

Bestimmen Sie das magnetische Potential außerhalb und innerhalb der Kugel.
(c) Berechnen Sie das Magnetfeld $\vec{H}$ außerhalb und innerhalb der Kugel.

Aufgabe 2: Elektromagnetische Welle im Koaxialkabel

In einem ideal leitenden Koaxialkabel mit innerem Radius R_a und äußerem Radius R_b breite sich längst der Achse, die in z-Richtung liegt, eine transversale elektromagnetische Welle aus.
(a) Bestimmen Sie die $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Felder und die Dispersionsrelation $\omega(k)$ unter Verwendung der Maxwell-Gleichungen sowie der Randbedingungen

$$\begin{aligned} E_t\big|_{\rho=R_a} &= E_t|_{\rho=R_b} = 0 \\ B_n\big|_{\rho=R_a} &= B_n|_{\rho=R_b} = 0\,, \end{aligned}$$

wobei E_t und B_n die Tangential- und Normalkomponenten der elektrischen Feldstärke bzw. der magnetischen Induktion bzgl. der Oberfläche des Koaxialkabels bezeichnen.
Hinweis: Beginnen Sie mit der allgemeinen Zerlegung der Felder in Zylinderkoordinaten

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0(\rho,\phi)e^{i(kz-\omega t)}\,, \quad \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0(\rho,\phi)e^{i(kz-\omega t)}$$

und benutzen Sie die Symmetrie des Systems.
(b) Wie groß ist der Energiefluss durch den Kabelquerschnitt?

Bitte wenden!

Aufgabe 3: Gaußsches Wellenpaket

Ein beliebiges Wellenpaket kann immer als Überlagerung von ebenen Wellen mit unterschiedlicher Wellenzahl k und Amplitude $a(k)$ dargestellt werden. In einer Dimension gilt

$$E_{\pm}(x,t) \quad = e^{i(k_0 x \pm \omega_0 t)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, a(k)\, e^{i(k-k_0)(x \pm v_g t)} \,.$$

Dabei gibt k_0 den Schwerpunkt des Wellenpakets in k-Raum an. v_g ist die Gruppengeschwindigkeit. Die Phasengeschwindigkeit ist gegeben durch: $u_0 = \frac{\omega_0}{k_0}$.
(a) Betrachten Sie das Gaußsche Wellenpaket mit

$$a(k) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(k-k_0)^2}{2\sigma^2}} \,.$$

σ entspricht dem Abstand der symmetrisch zu k_0 liegenden Punkte, bei denen $|a(k)|^2$ nur noch den e-ten Teil des Maximums ausmacht. Berechnen Sie damit das elektrische Feld im Ortsraum $E(x,t)$, indem Sie das obige Integral ausführen.

Hinweise: (i) $\int_{-\infty+i\alpha}^{\infty+i\alpha} \mathrm{d}y e^{-y^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y e^{-y^2}$, wobei α eine reelle Konstante ist.

(ii) Führen Sie eine quadratische Ergänzung in der Exponentialfunktion durch.

(b) Welche Breite hat das Wellenpaket im Ortsraum? Vergleichen Sie diese mit der entsprechenden Größen im k-Raum.

Aufgabe 4: Residuensatz

(a) Zeigen Sie, dass

$$\theta(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k\, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{k - \mathrm{i}\epsilon} \qquad (\epsilon > 0)$$

eine Integraldarstellung der Heaviside-Funktion ist. Werten Sie hierzu das Integral für $x < 0$ und $x > 0$ mit dem Residuensatz aus. Was ergibt sich für $x = 0$?
(b) Berechnen Sie mit dem Residuensatz:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\phi}{b + \cos\phi} \qquad (b > 1)$$

Hinweis: Schreiben Sie das Integral als geschlossenes Konturintegral $\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ über die Funktion

$$f(z) = \frac{z^{-1}}{b + \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})} \,,$$

indem Sie den Integrationsweg $\gamma = \gamma(\phi)$ entsprechend wählen.
