

### ③ Gaußsches Wellenpaket

$$E_{\pm}(x,t) = e^{i(k_0 x \pm \omega_0 t)} \int_{-\infty}^{\infty} dk a(k) e^{i(k-k_0)(x \pm v_g t)}$$

$$(a) a(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(k-k_0)^2}{2\sigma^2}}$$

$$E_{\pm}(x,t) = e^{i(k_0 x \pm \omega_0 t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp \left[ \underbrace{-\frac{(k-k_0)^2}{2\sigma^2} + i(k-k_0)(x \pm v_g t)}_A \right]$$

$$A = - \left[ \left( \frac{k-k_0}{2\sigma} \right)^2 - 2i \frac{k-k_0}{2\sigma} \frac{x \pm v_g t}{2} + \frac{i^2 (x \pm v_g t)^2}{2\sigma^2} \right] + \frac{i^2 (x \pm v_g t)^2}{2\sigma^2} = - \left[ \frac{k-k_0}{2\sigma} - \frac{i(x \pm v_g t)}{2\sigma} \right]^2 - \frac{x^2}{\sigma^2}$$

Addition eines Null  
mit letzten Term der  
oberen Zeile

$$\text{wobei } \frac{x^2}{\sigma^2} = \frac{i^2 (x \pm v_g t)^2}{2\sigma^2}$$

unabhängig von  $k$ !

Substituiere  $q = \frac{k-k_0}{2\sigma}$  und  $u = q - i\sigma \rightarrow du = \frac{dk}{2\sigma}$

$$E_{\pm}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{i(k_0 x \pm \omega_0 t)} e^{-\frac{(x \pm v_g t)^2}{2\sigma^2}} \int_{-\infty - i2\sigma}^{\infty - i2\sigma} du e^{-u^2}$$

Hinweis: Gauß-Integral  
 $\int_{-\infty}^{\infty} du e^{-u^2} = \sqrt{\pi}$

$$E_{\pm}(x,t) = e^{i(k_0 x \pm \omega_0 t)} e^{-\frac{(x \pm v_g t)^2}{2\sigma^2}}$$

entspricht  $e^{-\frac{(x \pm v_g t)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{e}$

$$(b) |E|^2 = \frac{1}{e} |E_{\max}|^2 \Rightarrow (x \pm v_g t)^2 = \frac{1}{\sigma^2} \quad \text{Setze } x_{\max} = \pm v_g t$$

$$\Rightarrow (x_{\pm} - x_{\max}) = \pm \frac{1}{\sigma} \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{\sigma}$$

$$\Delta k \cdot \Delta x = 1 = \text{const.}$$

$$\text{im } k\text{-Raum: } (k_{\pm} - k_{\max}) = \pm \sigma, \Delta k = \sigma$$

(b) mit Residuensatz berechnen:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{b + \cos \varphi} \quad (b > 1)$$

Hinweis: als Konturintegral über  $f(z) = \frac{z^{-1}}{b + \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})}$  schreiben...

Mit  $z = e^{i\varphi}$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi) \hookrightarrow \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) = \cos \varphi$

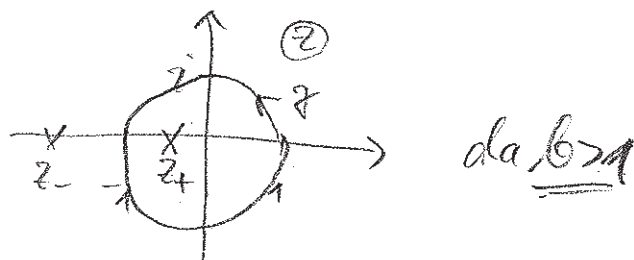
$$dz = iz d\varphi$$

$$\Rightarrow \oint_{\gamma} dz \cdot f(z) = i \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{b + \cos \varphi} = i \underline{1}$$

Suche Pole von  $f(z)$ :  $b + \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) = 0 \stackrel{\text{mit } 2z \text{ multiplizieren}}{\Leftrightarrow} z^2 + 2bz + 1 = 0$

$$z_{\pm} = -b \pm \sqrt{b^2 - 1}$$

$$\rightarrow f(z) = \frac{2}{(z - z_-)(z - z_+)}$$



Damit ist der Integralwert durch das Residuum innerhalb der Kontur gegeben:

$$I = -i \oint_{\gamma} f(z) dz = -i 2\pi i \underbrace{\text{Res}[f(z), z_+]}$$

$$\text{Res}\left[\frac{2}{(z - z_+)(z - z_-)}, z_+\right] = \frac{2}{z_+ - z_-}$$

$$= \frac{4\pi}{z_+ - z_-} = \frac{2\pi}{\sqrt{b^2 - 1}}$$

$\rightarrow$  Sind die Pole faktorisiert, erhält man das Res. durch Streichen der divergierenden Faktoren und Setzen  $z \rightarrow z_{\text{pol}}$