Klassische Theoretische Physik III (Theorie C)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. T. Kasprzik, Dr. L. Mihaila
http://www.ttp.kit.edu/∼kasprzik/theoc/

WS 13/14
Übungsblatt 9
Besprechung: 15.01.2014

Aufgabe 1: Homogene Wellengleichung

(a) Bestimmen Sie die Lösung der homogenen Wellengleichung

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\varphi(\vec{r},t) = 0$$

in 3 Dimensionen mittles Fouriertransformation. Verwenden Sie den Ansatz

$$\varphi(\vec{r},t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \int \mathrm{d}^3k\, \hat{\varphi}(\vec{k},\omega)\, \exp[\,\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)]\,,$$

und bestimmen Sie $\hat{\varphi}(\vec{k},\omega)$. Berechnen Sie $\varphi(\vec{r},t)$, indem Sie die Rücktransformation explizit durchführen.

(b) Zeigen Sie, dass die homogene Lösung

$$\varphi(x,t) = \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, a(k)\, \exp[\,\mathrm{i}(kx - \omega t)] \qquad (\omega = c|k|)$$

der eindimensionalen Wellengleichung $(\partial_t^2/c^2 - \partial_x^2)\varphi(x,t) = 0$ geschrieben werden kann als

$$\varphi(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)\,.$$

Hierbei ist $a(k) \in \mathbb{C}$, f und g sind reelle Funktionen.
Hinweis: Verwenden Sie $\mathrm{Re}\,[a(z)] = [a(z) + a^*(z)]/2$.

Aufgabe 2: Eichfreiheit

Die elektrische Feldstärke einer elektromagnetischen Welle sei durch

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)\,, \quad \text{mit} \quad \vec{E}_0\cdot\vec{k} = 0\,,\ \omega = ck\,,\ k = |\vec{k}|$$

gegeben.

(a) Berechnen Sie die magnetische Induktion $\vec{B}(\vec{r},t)$ für $\varrho = 0\,,\ \vec{j} = 0$. Zeigen Sie, dass alle vier Maxwell-Gleichungen erfüllt sind.

(b) Finden Sie für diese Felder zeitabhängige Potentiale $\vec{A}$ und φ welche:
- (i) sowohl die Bedingungen für die Lorenz-Eichung als auch für die Coulomb-Eichung
- (ii) nur die Lorenz-Eichung
- (iii) nur die Coulomb-Eichung
- (iv) weder die Lorenz- noch die Coulomb-Eichung

erfüllen.

Hinweis: Verwenden Sie dazu Eichtransformationen.

Bitte wenden!

Aufgabe 3: Elektromagnetische Kugelwelle

Die elektrischen und magnetischen Felder einer Kugelwelle seien durch

$$\vec{E}\,(\vec{r}\,,\,t) = \vec{E}_0(\theta,\phi)\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\,, \quad \vec{B}\,(\vec{r}\,,\,t) = \vec{B}_0(\theta,\phi)\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}$$

gegeben, wobei $r = |\vec{r}\,|$. Führen Sie die folgenden Rechnungen in Kugelkoordinaten durch.

(a) Bestimmen Sie zunächst das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ in Coulomb-Eichung und Berechnen Sie $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Was folgt für B_r?

(b) Berechnen Sie $\vec{E}$ aus $\vec{\nabla} \times \vec{B}$. Was folgt für E_r? Welche Bedingungen erfüllen also $\vec{B}$, $\vec{E}$ und $\vec{r}$?

(c) Bestimmen Sie die Dispersionsrelation $\omega(k)$.

(d) Berechnen Sie den Poynting-Vektor und geben Sie die Richtung des Energieflusses an.
Hinweis: Die explizite Form von $\vec{E}_0(\theta,\phi)$ und $\vec{B}_0(\theta,\phi)$ braucht hierbei nicht zu berechnet werden.

(e) Entwickeln Sie die Kugelwelle

$$\Psi\,(\vec{r}\,,\,t) = \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}$$

nach ebenen Wellen. Zur Berechnung der auftretenden Integrale sei angenommen, dass k einen beliebig kleinen, positiven Imaginärteil ($k \to k + i\epsilon$ mit $\epsilon > 0$) besitzt.

Aufgabe 4: Liénard-Wiechert Potentiale

Berechnen Sie die elektrischen und magnetischen Potentiale $\varphi(\vec{r}\,,\,t)$ und $\vec{A}(\vec{r}\,,\,t)$ einer punktförmigen Ladung q, welche sich auf der Bahn $\vec{R}_q(t)$ bewegt. Beachten Sie dabei, dass die Ladungsverteilung $\varrho(\vec{r}\,,\,t)$ und die Stromdichte $\vec{j}\,(\vec{r}\,,\,t)$ durch

$$\varrho(\vec{r}\,,\,t) = q\delta(\vec{r} - \vec{R}_q(t)) \quad \text{und} \quad \vec{j}\,(\vec{r}\,,\,t) = q\dot{\vec{R}}_q(t)\delta(\vec{r} - \vec{R}_q(t))$$

gegeben sind. Benutzen Sie dazu die retardierte Greensche Funktion der Wellengleichung, welche in der Vorlesung hergeleitet wurde.
Hinweis: Betrachten Sie das Problem in Lorenz-Eichung.
