Klassische Theoretische Physik III (Theorie C)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. T. Kasprzik, Dr. L. Mihaila
`http://www.ttp.kit.edu/~kasprzik/theoc/`

WS 13/14
Übungsblatt 10
Besprechung: 22.01.2014

Aufgabe 1: Relativistische Addition von Geschwindigkeiten und Rapiditäten

(a) Die Lorentztransformation der Koordinaten von einem Inertialsystem K in ein Inertialsystem K', das sich relativ zu K mit der Geschwindigkeit v entlang der gemeinsamen x-Achse bewegt, lautet

$$x' = \gamma(x - \beta ct)\,, \quad ct' = \gamma(ct - \beta x)\,,$$

mit $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ und $\beta = v/c$.
Zeigen Sie, dass die sukzessive Anwendung zweier Lorentztransformationen mit den Geschwindigkeiten v_1 und v_2 wieder als Lorentztransformation mit der Geschwindigkeit

$$v_{1+2} = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2/c^2}$$

dargestellt werden kann.

(b) Zeigen Sie, dass die Lorentztransformation alternativ in folgender Form dargestellt werden kann:

$$x' = x\,\cosh\eta - ct\,\sinh\eta\,, \quad ct' = ct\,\cosh\eta - x\,\sinh\eta\,.$$

Berechnen Sie die Rapidität η als Funktion von β. Was ergibt sich für η_{1+2}, die resultierende Rapidität zweier sukzessiver Lorentztransformationen, ausgedrückt durch die Rapiditäten η_1 und η_2?

Aufgabe 2: Relativistische Bewegungsgleichungen

Betrachten Sie ein relativistisches, geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld unter dem Einfluss der Lorentz-Kraft

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})\,.$$

Die kovariante Verallgemeinerung der Newtonschen Kraft $\vec{F}$ lautet

$$K^\mu \;=\; (K^0, K^i)^{\mathrm{T}}\,, \quad \text{wobei} \quad K^0 = \frac{1}{c}\frac{\vec{F}\cdot\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad K^i = \frac{F^i}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (\beta^2 = \vec{v}^{\,2}/c^2).$$

Stellen Sie die kovariante Form der Bewegungsgleichungen auf, und zeigen Sie, dass K^μ das richtige Transformationsverhalten aufweist. Welche physikalische Bedeutung hat K^0? Schreiben Sie die Bewegungsgleichungen für das Teilchen im elektromagnetischen Feld in kovarianter Form.

Bitte wenden!

Aufgabe 3: Doppler-Effekt

Eine Lichtquelle emittiere ebene monochromatische elektromagnetische Wellen der Frequenz ω, $\psi(x^\mu) = Ae^{ik\cdot x}$. Die Ausbreitungsrichtung der Wellen schließe mit der x-Achse den Winkel θ ein. Ein Beobachter bewege sich mit konstanter Geschwindigkeit v in Richtung der x-Achse.
(a) Berechnen Sie die Frequenz ω', die der Beobachter für die ebene Welle misst (Doppler-Effekt), sowie die Richtung, aus der die Welle zu kommen scheint (Aberrationswinkel).
Hinweise: (i) Betrachten Sie die Phase der ebenen Welle und nutzen Sie aus, dass $k^\mu \equiv (\omega/c, \vec{k})$ ein Vierervektor ist, d.h. er transformiert wie x^μ. Insbesondere ist $k \cdot x = k^\mu x_\mu$ invariant unter Lorentztransformationen. (ii) Ebenso ist $k^2 = k \cdot k = k^\mu k_\mu$ invariant unter Lorentztransformationen.

(b) Diskutieren Sie die Fälle $\theta = 0,\ \pi,\ \pm\pi/2$.

Aufgabe 4: Gleichförmig beschleunigtes Teilchen

Auf ein Teilchen mit der Ruhemasse m wirke eine Konstante Kraft F_0 in x-Richtung.
(a) Lösen Sie die relativistische Bewegungsgleichung

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_0\,, \quad \text{wobei} \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{und} \quad \vec{v}(t) = (v(t), 0, 0)\,.$$

Finden Sie $v(t)$ und $x(t)$ mit den Anfangswerten $v(0) = 0$ und $x(0) = 0$.

(b) Berechnen Sie den expliziten Zusammenhang zwischen t und der Eigenzeit $\tau = \tau(t)$. Geben Sie v als Funktion der Eigenzeit τ an, d.h. $v(t(\tau)) = v(\tau)$. Wie lautet $x(t(\tau)) = x(\tau)$?
Hinweis:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 + a^2x^2}} = \frac{1}{a}\mathrm{Arsinh}(ax)\,.$$