① Geladenes Teilchen auf Kreisbahn

$$\rho(\vec{r},t) = q\,\delta(x - R\cos(\omega t))\,\delta(y - R\sin(\omega t))\,\delta(z)$$

(a) Dipolmoment:

$$\vec{p}(t) = \int d^3r\, \vec{r}\, \rho(\vec{r},t) = q \int d^3r\, \vec{r}\, \delta(x - R\cos(\omega t))\,\delta(y - R\sin(\omega t))\,\delta(z)$$

$$= qR\left[\cos(\omega t)\,\vec{e}_x + \sin(\omega t)\,\vec{e}_y\right] \equiv qR\,\vec{e}_\varrho$$

$$= qR\,\mathrm{Re}\left[(\vec{e}_x + i\vec{e}_y)\,e^{-i\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[\vec{p}_0\, e^{-i\omega t}\right]$$

mit $\vec{p}_0 = qR(\vec{e}_x + i\vec{e}_y)$

(b) Dipolfelder — aus VL: $\vec{A}_D(\vec{r},t) = \dfrac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\left(-\dfrac{\mu_0}{4\pi}\, i\omega\vec{p}\right)$ (für zeitlich konst. $\vec{p}$)

$$\vec{B}_D = \frac{\mu_0}{4\pi}\, ck^2\, \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\left(1 - \frac{1}{ikr}\right)(\vec{n}\times\vec{p})$$ mit $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$ und $\omega = ck$

$$\vec{E}_D = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\left[k^2(\vec{n}\times\vec{p})\times\vec{n} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{r} - ik\right)\left[3\vec{n}(\vec{p}\cdot\vec{n}) - \vec{p}\right]\right]$$

entwickeln für Fernzone $kr \gg 1$ und $\vec{k} \parallel \vec{r}$

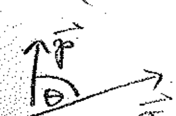
$$\vec{B}_D = \frac{\mu_0}{4\pi}\, ck^2\, \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}(\vec{n}\times\vec{p})$$

$$\vec{E}_D = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\, k^2(\vec{n}\times\vec{p})\times\vec{n} = c(\vec{B}_D\times\vec{n})$$

$$\langle\vec{S}\rangle_T = \langle\vec{E}\times\vec{H}\rangle_T = \frac{1}{2\mu_0}\,\mathrm{Re}(\vec{E}_D\times\vec{B}_D^*) \overset{\vec{n}=\vec{k}/k}{=} \frac{c}{2\mu_0}\frac{1}{k}\,\mathrm{Re}\left[(\vec{B}_D\times\vec{k})\times\vec{B}_D^*\right]$$

$$= \frac{c}{2\mu_0 k}\,|\vec{B}_D|^2\,\vec{k}, \quad \text{da } \vec{B}_D\cdot\vec{k} = 0$$

$$= \frac{c}{2\mu_0}\,\frac{\mu_0^2}{(4\pi)^2 r^2}\,\omega^2 \underbrace{|\vec{k}\times\vec{p}|^2}_{k^2 p^2 \sin^2\theta}\,\frac{\vec{k}}{k} = \frac{\mu_0 c^3}{32\pi^2}\,\frac{k^4|\vec{p}|^2}{r^2}\,\sin^2\theta\,\vec{n}$$

Winkel θ: 

abgestrahlte Leistung pro Raumwinkel:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \langle \vec{S} \rangle_T \cdot \vec{n}\, r^2 = \frac{c}{32\pi^2\varepsilon_0} k^4 |\vec{p}_0|^2 \sin^2\theta$$

zeitabhängiges Dipolmoment: $\vec{k}\times\vec{p} \sim \vec{e}_r \times \vec{p}$

$$\Rightarrow \frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{\mu_0} r^2 \left\langle \frac{\mu_0^2}{16\pi^2} \frac{c^2 k^4}{r^2} |\vec{e}_r\times\vec{p}|^2 \right\rangle_T$$

$$= \frac{\mu_0}{c}\frac{\omega^4}{16\pi^2} \langle \underbrace{|\vec{e}_r \times \vec{p}(t)|^2} \rangle_T \quad \text{mit } \vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$\cos^2\theta \sin^2(\omega t) + \cos^2\theta\cos^2(\omega t)$

$+ (\sin\theta\cos\varphi\sin(\omega t) - \sin\theta\sin\varphi\cos(\omega t))^2 \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \underbrace{\cos^2\theta}_{1-\sin^2\theta} + \sin^2\theta\,(\underbrace{\cos\varphi\sin\omega t - \sin\varphi\cos\omega t}_{\sin^2(\omega t-\varphi) = 1-\cos^2(\omega t-\varphi)}))$

$= 1 - \sin^2\theta\, \underbrace{\cos^2(\omega t - \varphi)}$

$\hookrightarrow$ mittelt sich zu $\frac{1}{2}$

$$= \frac{\omega^4}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3} q^2 R^2 \left(1 - \frac{\sin^2\theta}{2}\right) = \underbrace{\frac{\omega^4}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3}}_{\frac{\mu_0\omega^4}{32\pi^2 c} p_0^2} q^2R^2 \underbrace{(2 - \sin^2\theta)}_{1+\cos^2\theta}$$

$$P = \int d\Omega \frac{dP}{d\Omega} = \frac{\omega^4}{4\pi\varepsilon_0 c^3} q^2 R^2 \frac{2}{3}$$

(c) N äquidistante Ladungen auf Kreisbahn:

$$\vec{p}_N = \sum_{l=0}^{N-1} \vec{p}_l = \sum_{l=0}^{N-1} qR\left[\cos\left(\omega t + \frac{2\pi l}{N}\right)\vec{e}_x + \sin\left(\omega t + \frac{2\pi l}{N}\right)\vec{e}_y\right]$$

$$= qR \sum_{l=0}^{N-1} \mathrm{Re}\left[(\vec{e}_x + i\vec{e}_y) e^{-i\omega t} e^{-i\frac{2\pi l}{N}}\right]$$

$$= \underbrace{qR\,\mathrm{Re}\left[(\vec{e}_x + i\vec{e}_y)e^{-i\omega t}\right]}_{\vec{p} \text{ aus (a)}} \underbrace{\sum_{l=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i l}{N}}}_{\frac{1-e^{-2\pi i}}{1-e^{-2\pi i/N}} = 0 \text{ wegen } e^{-2\pi i} = 1} \qquad \left[\sum_{l=0}^{N-1} x^l = \frac{1-x^N}{1-x} \right.$$

$= 0$

② Lineare Antenne

$$I(z,t) = I_0 \left(1 - \frac{2|z|}{d}\right) \exp(-i\omega t)$$

$$\vec{j}(\vec{r},t) = I(z,t)\,\delta(x)\,\delta(y)\,\vec{e}_z \rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = I_0 \begin{Bmatrix} -2/d \\ 2/d \end{Bmatrix} \delta(x)\delta(y)\, e^{-i\omega t} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\rightarrow \rho(\vec{r},t) = I_0\,\delta(x)\delta(y)\,\frac{2i}{\omega d} \begin{Bmatrix} (+1) \\ (-1) \end{Bmatrix} e^{-i\omega t} \quad \text{für} \begin{Bmatrix} z>0 \\ z<0 \end{Bmatrix}$$

(a) Dipolnäherung: Dipol $\vec{p} = \int d^3r'\, \rho(\vec{r}',t)\, \vec{r}' = p_0\, \vec{e}_z$ (wg. $\delta(x), \delta(y)$)

$$p_0 = \frac{I_0}{i\omega}\left[\int_0^{d/2} dz\, z\left(-\frac{2}{d}\right) + \int_{-d/2}^{0} dz\, z\, \frac{2}{d}\right] = \frac{i I_0 d}{2\omega}$$

Nahzone: $kr \ll 1$, $e^{ikr} \approx 1$

$$\vec{E}_D = \frac{e^{-i\omega t}}{4\pi\varepsilon_0}\, \frac{3\vec{n}(\vec{p}_0\cdot\vec{n}) - \vec{p}}{r^3}$$

$$\vec{B}_D = \frac{\mu_0}{4\pi}\, c\, \frac{ik}{r^2}\, (\vec{n}\times\vec{p})$$

mit $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$, $k = \frac{\omega}{c}$

(aus Vorlesung ...)

Fernzone: $kr \gg 1$

$$\vec{E}_D = e^{-i\omega t}\, \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, k^2\, \frac{e^{ikr}}{r}\, (\vec{n}\times\vec{p})\times\vec{n}$$

$$\vec{B}_D = e^{-i\omega t}\, \frac{\mu_0}{4\pi}\, ck^2\, \frac{e^{ikr}}{r}\, (\vec{n}\times\vec{p})$$

(b) Zeitgemittelter Poynting-Vektor in Nahzone:

$$\langle \vec{S}\rangle_T = \frac{1}{2\mu_0}\,\mathrm{Re}\left(\vec{E}\times\vec{B}^*\right) = \frac{1}{2\mu_0}\,\mathrm{Re}\left[\frac{\mu_0}{(4\pi)^2\varepsilon_0}\,\frac{-ik}{r^2}\,\underbrace{\left(\frac{3\vec{n}(\vec{p}_0\cdot\vec{n}) - \vec{p}}{r^3}\times(\vec{n}\times\vec{p})^*\right)}_{\text{reell (da } \sim p p^*)}\right]$$

hat nur Imaginärteil

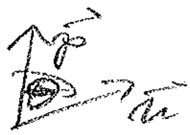
$\rightarrow \mathrm{Re}[\,\ldots\,] = 0 \rightarrow \langle \vec{S}\rangle_T = 0$

(c) $\frac{dP}{d\Omega}$ und Leistung P in Fernzone:

$$\left.\frac{dP}{d\Omega}\right|_{\text{Fernzone}} = \langle \vec{S}\rangle_T \Big|_{\text{Fernzone}} \cdot \vec{n}\, r^2 = \frac{c}{32\pi^2\varepsilon_0}\, k^4 \underbrace{[(\vec{n}\times\vec{p})\times\vec{n}]\times(\vec{n}\times\vec{p}^*)}\cdot\vec{n}$$

$$[\vec{p}-\vec{n}(\vec{p}\cdot\vec{n})]\times(\vec{n}\times\vec{p}^*)$$
$$= \vec{n}|\vec{p}|^2 - \vec{p}^*(\vec{p}\cdot\vec{n}) - |\vec{p}\cdot\vec{n}|^2 + \vec{p}^*(\vec{p}\cdot\vec{n})$$

$$= \frac{c}{32\pi^2\varepsilon_0}\, k^4 |\vec{p}|^2 \underbrace{(1-\cos^2\theta)}_{\sin^2\theta}$$



$$= \frac{1}{128\pi^2\varepsilon_0}\, \frac{I_0^2 d^2\omega^2}{c^3}\, \sin^2\theta$$

$$P = \int d\Omega\, \frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{128\pi^2\varepsilon_0}\, \frac{I_0^2 d^2\omega^2}{c^3} \underbrace{\int d\Omega \sin^2\theta}_{\underbrace{2\pi \underbrace{\int_{-1}^{1} dx\,(1-x^2)}_{2-\frac{1}{3}\cdot 2 = \frac{6}{3}-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}}}_{\frac{8\pi}{3}}}$$

$$= \frac{1}{48\pi\varepsilon_0}\, \frac{I_0^2 d^2\omega^2}{c^3}$$

③ Antenne mit Wechselspannung

$$\rho(\vec{r},t) = \rho(\vec{r})\exp(-i\omega t)$$

mit $\rho(\vec{r}) = \frac{q}{2a}\,\delta(x)\,\delta(y)\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right)\Theta(a-|z|)$

(a) Dipolmoment: $\vec{p} = \int d^3r'\,\rho(\vec{r}',t)\,\vec{r}'$

$$= \frac{q}{2a}\,e^{-i\omega t}\int_{-a}^{a} dz\, z\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right) = 0$$

(ungerader Integrand über geradem Intervall)

Quadrupolmomente:

Symmetrie bei Drehung um z-Achse: $Q_{xx} = Q_{yy} = -\frac{Q_{zz}}{2}$
(Quadrupoltensor spurlos)

alle $Q_{ij} = 0$ für $i \neq j$

$$Q_{zz} = \int d^3r'\,(2z'^2 - x'^2 - y'^2)\,\rho(\vec{r}')$$

$$= \frac{q}{2a}\int_{-a}^{a} dz'\,2z'^2\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right) \underset{\uparrow}{=} \frac{q}{a}\left(\frac{a}{\pi}\right)^3 \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} d\xi\,\xi^2\cos\xi}_{-4\pi}$$

Subst. $\xi = \frac{\pi z}{a}$

$d\xi = \frac{\pi}{a}\,dz$

$$= -4\,\frac{q a^2}{\pi^2} \equiv Q$$

def. $\vec{Q} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix}$ mit $Q_i = Q_{ij}\,n_j$

$Q_1 = Q_{xx}\,n_x = -\frac{Q}{2}\frac{x}{r}$

$Q_2 = -\frac{Q}{2}\frac{y}{r}$

$Q_3 = Q\frac{z}{r}$

(b) Quadrupolstrahlung (Vorlesung)

$$\vec{B}_Q = -i c k^3 \frac{\mu_0}{24\pi} \frac{e^{ikr}}{r} (\vec{n}\times\vec{Q})$$

$$\vec{E}_Q = -i \frac{k^3}{24\pi\varepsilon_0} \frac{e^{ikr}}{r} (\vec{n}\times\vec{Q})\times\vec{n}$$

(c) $\frac{dP}{d\Omega}$ und P:

$$\langle \vec{S}\rangle_T = \frac{1}{2\mu_0} \mathrm{Re}\left[\vec{E}_Q \times \vec{B}_Q^*\right] = \frac{1}{2\mu_0}\frac{c k^6 \mu_0}{\varepsilon_0 576\pi^2}\frac{1}{r^2}|\vec{n}\times\vec{Q}|^2 \vec{n}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ck^6}{288\pi}\frac{|\vec{n}\times \vec{Q}|^2}{r^2}\vec{n}$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = r^2 \vec{n}\cdot\langle\vec{S}\rangle_T = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ck^6}{288\pi^2}|\vec{n}\times\vec{Q}|^2$$

mit
$$|\vec{n} \times \vec{Q}|^2 = (n_2Q_3 - n_3Q_2)^2 + (n_3Q_1 - n_1Q_3)^2 + (n_1Q_2-n_2Q_1)^2$$

$$= \frac{Q^2}{r^4}\Big[\underbrace{\left(yz + z\frac{y}{2}\right)^2 + \left(-z\frac{x}{2} - xz\right)^2 + \left(-x\frac{y}{2}+y\frac{x}{2}\right)^2}_{\frac{9z^2y^2}{4}+\frac{9x^2z^2}{4}+0}\Big]$$

$$= \frac{9Q^2}{4r^4} z^2(x^2+y^2) = \frac{9}{4} Q^2\cos^2\theta\sin^2\theta$$

$$P = \int d\Omega \frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ck^6}{288\pi}\frac{9}{4}Q^2 \underbrace{\int d\Omega \cos^2\theta\sin^2\theta}_{2\pi \underbrace{\int_{-1}^{1} dx\, x^2(1-x^2)}_{\frac{1}{3}\cdot 2 - \frac{1}{5}\cdot 2 = \frac{10-6}{15} = \frac{4}{15}} = \frac{8\pi}{15}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ck^6 q^2 a^4}{15\pi^4}$$