

Klassische Theoretische Physik III WS 2014/2015**Prof. Dr. A. Shnirman**
Dr. B. Narozhny**Blatt 2**
Lösungen

1. Relative Stärke der Coulombischen Kraft: (10 Punkte)

Berechnen Sie das Verhältnis zwischen der Coulombischen Kraft und der Gravitationskraft für (a) zwei Elektronen und (b) zwei Protonen.

Finden Sie den Wert von dem Verhältnis zwischen der Ladung und der Masse q/m des Teilchens für dem die Zwei Kräfte gleich (in Betrag) sind.

Hier kein Material angegeben ist, deswegen setzen wir die relative Permittivität gleich Eins: $\epsilon_r = 1$.

Die Coulomb-Kraft im SI System:

$$F_C = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Die Gravitationskraft im SI System:

$$F_G = G \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Das Verhältnis zwischen der Coulombischen Kraft und der Gravitationskraft

$$\frac{F_C}{F_G} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 G m_1 m_2}.$$

Die Konstanten:

$$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s}; \quad \epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V} \cdot \text{m}}; \quad G = 6.67 \times 10^{-11}; \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}.$$

(a) *Für Elektronen*

$$m_1 = m_2 = m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}, \quad q_1 = q_2 = -e,$$

$$\frac{F_C}{F_G} = 4 \times 10^{42}.$$

(b) Für Protonen:

$$m_1 = m_2 = m_p = 1.672 \times 10^{-27} \text{ kg}, \quad q_1 = q_2 = e,$$

$$\frac{F_C}{F_G} = 10^{36}.$$

(c) Finden Sie den Wert von dem Verhältnis zwischen der Ladung und der Masse q/m des Teilchens für dem die Zwei Kräfte gleich (in Betrag) sind.

Für $m_1 = m_2 = m$ und $q_1 = q_2 = q$

$$\frac{F_C}{F_G} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 G m^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{q}{m} = \sqrt{4\pi\epsilon_0 G} = 0.86 \times 10^{-10} \frac{\text{C}}{\text{kg}}.$$

2. Kreisscheibe:

(10 Punkte)

Gegeben sei eine Kreisscheibe mit Radius R und vernachlässigbarer Dicke. Diese Scheibe besitze die homogene Flächenladungsdichte $\sigma = Q/(\pi R^2)$. Die Scheibe liege in der x - y Ebene und sei um den Ursprung zentriert.

[N.B.:] Der Übersicht halber sind die Rechnungen für diese Aufgabe in Gauss-Einheiten durchgeführt. Bei allen Ergebnissen ist der Umrechnungsfaktor zu SI Einheiten in [blau](#) angegeben.

(a) Berechnen Sie das Potential $\Phi(z)$ entlang der z -Achse:

Es bietet sich an, Zylinderkoordinaten zu wählen.

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \int_0^\infty d\rho \rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^\infty dz' \frac{\delta(z') \theta(R - \rho) \sigma}{\sqrt{(z' - z)^2 + \rho^2}} \\ &= 2\pi\sigma \int_0^R d\rho \frac{\rho}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} \\ &= 2\pi\sigma \left[\sqrt{z^2 + R^2} - |z| \right] \left(\times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \end{aligned}$$

- (b) Berechnen Sie aus dem Potential die Feldstärke $\vec{E}(z)$ und geben Sie den Sprung des elektrischen Feldes bei $z = 0$ an:

$$\vec{E}(z) = -\nabla\Phi(z) = -\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times\right) 2\pi\sigma \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} - \text{sgn}(z)\right) \hat{e}_z$$

Daher ist

$$E_z(0^+) - E_z(0^-) = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times\right) 4\pi\sigma.$$

- (c) Untersuchen Sie das elektrische Feld für sehr große Abstände, $z \gg R$. Wie verhält sich das Feld verglichen mit dem einer Punktladung?

Für $|z| \gg R$ gilt $\sqrt{z^2 + R^2} = |z|\sqrt{1 + \frac{R^2}{z^2}} \approx |z| \left(1 + \frac{R^2}{2z^2}\right)$. Deswegen:

$$\begin{aligned} E_z(z) &= -2\pi\sigma \left(\text{sgn}(z) \left(1 - \frac{R^2}{2z^2}\right) - \text{sgn}(z) \right) \\ &= \pi\sigma \text{sgn}(z) \frac{R^2}{z^2} = \text{sgn}(z) \frac{Q}{z^2} \left(\times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \end{aligned}$$

Eine Punktladung Q im Ursprung induziert auf der z -Achse ein Potential

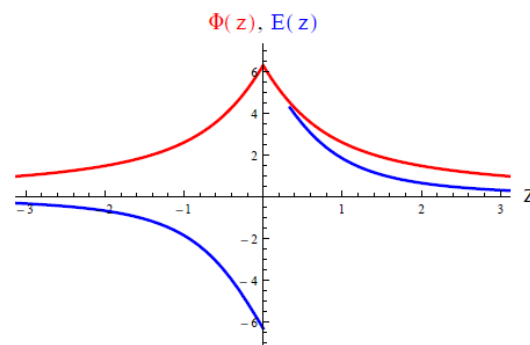
$$\Phi(z) = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times\right) \frac{Q}{|z|}$$

und daher das gleiche elektrische Feld:

$$E_z(r) = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times\right) \text{sgn}(z) \frac{Q}{z^2}.$$

- (d) Skizzieren Sie $E(z)$ und $\Phi(z)$.

Im folgenden Plot ist $\sigma = 1 \text{ esu cm}^{-2}$ und $R = 1 \text{ cm}$. Also ist $[E] = \text{esu cm}^{-2}$ und $[\Phi] = \text{esu cm}^{-1}$ für z in cm .



- (e) *Geben Sie die Feldstärke $\vec{E}(z)$ in dem Grenzfall $R \rightarrow \infty$ bei konstanter Oberflächenladungsdichte an und verifizieren Sie Ihr Ergebnis mit Hilfe des Gauß'schen Satzes.*

Aus Teilaufgabe b) folgt

$$E_z(z) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 2\pi\sigma \operatorname{sgn}(z) \left(\times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)$$

Alternativ kann man den Gauss'schen Satz anwenden, wobei wir über das Volumen V_Z des Zylinders $z' \in (-z, z)$, $r = R$ integrieren. Im Limes $R/|z| \rightarrow \infty$ vernachlässigen wir die Randterme und bekommen

$$\oint_{\partial V_Z} \vec{E} d\vec{A} = \pi R^2 (E_z(z) - E_z(-z)) = 4\pi Q.$$

Aus Symmetriegründen folgt

$$E_z(z) = \operatorname{sgn}(z) 2 \frac{Q}{R^2} \left(\times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right),$$

im Einklang mit dem vorigen Ergebnis.

3. Kapazität:

Ein Zylinderkondensator besteht aus zwei voneinander isolierten leitenden Zylindern. Die innere metallische Elektrode mit Radius a trägt die Ladung Q pro Längenelement l . Ein Metallblech mit Radius b umgibt den inneren Zylinder konzentrisch und trägt die Ladung $-Q$ pro Längenelement.

Wir wählen hier Zylinderkoordinaten.

- (a) *Bestimmen Sie die Flächenladungsdichte σ auf der Kernelektrode.*

Die Flächenladungsdichte ist

$$\begin{aligned} \sigma_a &= \frac{Q}{2\pi a l} \text{ ("Kernelektrode")} \\ \sigma_b &= -\frac{Q}{2\pi b l} \end{aligned}$$

und folglich die Raumladungsdichte

$$\rho(\vec{x}) = \sum_{R=a,b} \sigma_R \delta(\rho - R).$$

- (b) Berechnen Sie $\vec{E}(r)$ in den Bereichen $r < a$, $a < r < b$ und $b < r$.

Anwenden des Gauss'schen Satzes (Integrationsvolumen ein Zylinder des Radiuses r) liefert

$$E_r(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{rl} \theta(r-a) \theta(b-r).$$

- (c) Leiten Sie aus dem elektrischen Feld $\vec{E}$ das Potential Φ her. Setzen Sie dabei $\Phi(\infty) = 0$.

Im Innenbereich gilt

$$\Phi(r) = - \int_a^r dr' E_r(r') = -\frac{2Q}{l} \ln \frac{r}{a} + \Phi_0.$$

Das Verhalten bei $r \rightarrow \infty$ bestimmt die Integrationskonstante und folglich (mit Hilfe der Stetigkeitsbedingung für Φ)

$$\Phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{2Q}{l} \ln \frac{r}{b} \theta(r-a) \theta(b-r) - \frac{2Q}{l} \ln \frac{a}{b} \theta(a-r) \right].$$

Die logarithmische Abhängigkeit ist typisch für ein effektiv zweidimensionales Problem.

- (d) Skizzieren Sie $E(r)$ und $\Phi(r)$.

