

Klassische Theoretische Physik III WS 2014/2015

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. B. NarozhnyBlatt 3
Lösungen

1. Leitende Ebene:

(10 Punkte)

Zwei Punktladungen $q_1 = Q$ und $q_2 = -Q$ befinden sich in den Abständen a und $2a$ von einer unendlich ausgedehnten, leitenden Ebene in Punkten $(-b/2, 0, a)$ und $(b/2, 0, 2a)$ (siehe Abbildung).

Die Fläche ist leitend, daher darf keine elektrische Feldkomponente in den Platten vorhanden sein. Das Potential ist konstant und wir wählen insbesondere $\Phi = 0$.

(a) Wo liegen die Spiegelladungen und wie groß sind sie?

Die Spiegelladungen $q_3 = -Q$ und $q_4 = Q$ liegen dann in Punkten $(-b/2, 0, -a)$ und $(b/2, 0, -2a)$.

(b) Berechnen Sie das elektrische Feld auf der Oberfläche $\vec{E}(x, y, 0)$.

Das Gesamtpotential ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^4 \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(x+b/2)^2 + y^2 + (z-a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-b/2)^2 + y^2 + (z-2a)^2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{(x+b/2)^2 + y^2 + (z+a)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-b/2)^2 + y^2 + (z+2a)^2}} \right].\end{aligned}$$

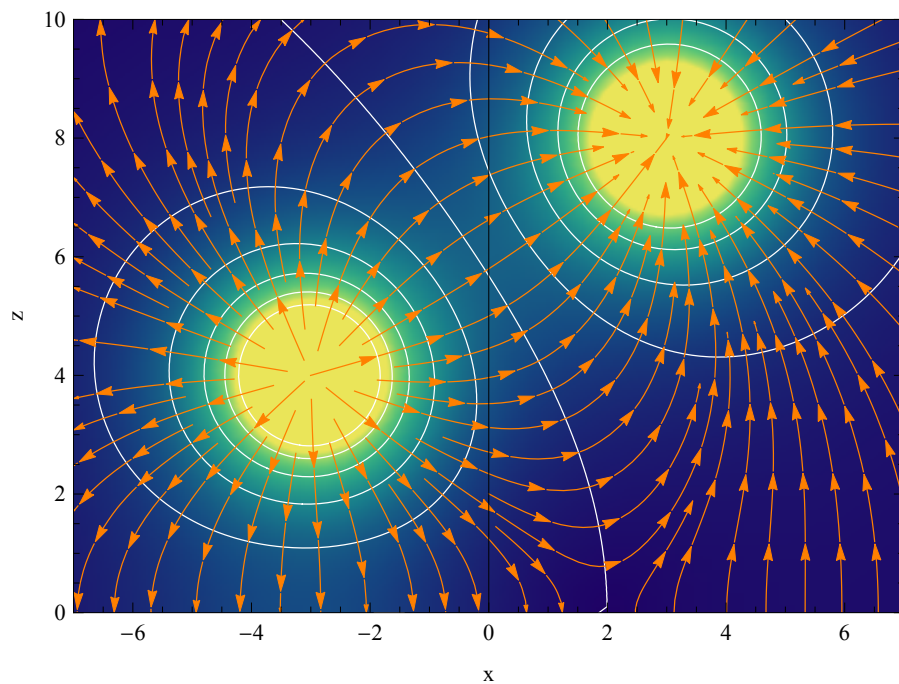
Das elektrische Feld auf der Fläche ist senkrecht

$$\vec{E}(x, y, 0^+) = -\vec{e}_z \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0^+},$$

$$\vec{E}(x, y, 0^+) = -\vec{e}_z \frac{Qa}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{[(x+b/2)^2 + y^2 + a^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{2}{[(x-b/2)^2 + y^2 + 4a^2]^{\frac{3}{2}}} \right].$$

Skizzieren Sie das Feldlinienbild.

Hier $a = 4$, $b = 6$.



(c) Berechnen Sie die induzierte Oberflächenladungsdichte $\sigma(x, y)$.

Die Oberflächenladungsdichte ergibt sich aus dem Sprung des elektrischen Feldes

$$\sigma(x, y) = -\frac{Qa}{2\pi} \left[\frac{1}{[(x + b/2)^2 + y^2 + a^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{2}{[(x - b/2)^2 + y^2 + 4a^2]^{\frac{3}{2}}} \right].$$

(d) Berechnen Sie die gesamte induzierte Ladung.

Die gesamte Oberflächenladung ist gegeben durch

$$Q_{\text{ind}} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \sigma(x, y) = q_3 + q_4 = 0.$$

2. Leitende Kugel:

(10 Punkte)

Betrachten Sie eine geerdete, leitende Kugel K_R mit Radius R

$$K_R = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{r}| < R\}.$$

Am Punkt $\mathbf{r}_q = (0, 0, a)$ mit $a > R$ befindet sich eine Punktladung q .

Da die leitende Kugel geerdet ist, gilt für das Potential im Innenraum K_R , $\phi(\mathbf{r}) = 0$. Wir berechnen nun das Potential im Außenraum $\bar{K}_R^C = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{r}| > R\}$ mit der Methode der Spiegelladung.

Wir fügen eine fiktive Spiegelladung q' im Innenraum der Kugel hinzu, deren Potential im Außenraum die Laplace-Gleichung erfüllt, also eine homogene Lösung darstellt. Diese Lösung wird so gewählt, dass das Gesamtpotential das Randwertproblem löst. Die Spiegelladung beschreibt dabei das Potential der auf dem Rand des Gebietes $\bar{K}_R^C$ induzierten Oberflächenladung.

(a) Berechnen Sie das Potential im gesamten Raum.

Da das Problem symmetrisch bezüglich Rotationen um die z-Achse ist kann die Spiegelladung ebenfalls nur auf der z-Achse liegen. Wir bezeichnen die Position der Spiegelladung mit $\mathbf{a}' = a'\mathbf{e}_z$, wobei $|a'| < R$ gilt und $\mathbf{e}_z$ den Einheitsvektor in z-Richtung bezeichnet. Das Potential im Außenraum ist nun gegeben durch die Überlagerung beider Potentiale,

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{|\mathbf{r} - a\mathbf{e}_z|} + \frac{q'}{|\mathbf{r} - a'\mathbf{e}_z|} \right). \quad (1)$$

Die Konstanten a' und q' sind aus der Randbedingung $\phi(|\mathbf{r}| = R) = 0$ zu berechnen. Dazu betrachten wir die zwei Punkte $\mathbf{r} = \pm R\mathbf{e}_z$ in Gl. (1). Wir erhalten die beiden Gleichungen

$$\frac{q}{a - R} = \frac{-q'}{R - a'}, \quad (2)$$

$$\frac{q}{a + R} = \frac{-q'}{a' + R}. \quad (3)$$

Man erkennt unmittelbar, dass $\text{sign}(q) = -\text{sign}(q')$ gilt. Teilt man nun Gl. (2) und (3) durcheinander so erhält man

$$a' = \frac{R^2}{a} < R. \quad (4)$$

Einsetzen in Gl (2) gibt die Spiegelladung

$$q' = -q \frac{R}{a}. \quad (5)$$

Wir setzen die Konstanten aus Gl. (4) und (5) in das Potential (1) ein und erhalten

$$\begin{aligned}
 \phi(\mathbf{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - a\mathbf{e}_z|} - \frac{R/a}{|\mathbf{r} - \frac{R^2}{a}\mathbf{e}_z|} \right) \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{a^2} - 2\frac{r}{a}\cos(\theta)}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{R^2}{a^2} + \frac{r^2}{R^2} - 2\frac{r}{a}\cos(\theta)}} \right) \\
 &= \frac{\bar{q}}{a} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \bar{r}^2 - 2\bar{r}\cos(\theta)}} - \frac{1}{\sqrt{\bar{R}^2 + \frac{\bar{r}^2}{\bar{R}^2} - 2\bar{r}\cos(\theta)}} \right).
 \end{aligned} \tag{6}$$

Hierbei haben wir das Potential in Kugelkoordinaten (r, φ, θ) geschrieben, wobei wir $\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_z = r \cos(\theta)$ benutzen. In der letzten Zeile haben wir die dimensionslosen Variablen $\bar{r} = r/a$, $\bar{R} = R/a$ eingeführt und schreiben $\bar{q} = q/4\pi\epsilon_0$.

- (b) *Leiten Sie daraus das elektrische Feld $\mathbf{E}$ auf der Oberfläche her. Zeigen Sie dabei, dass das elektrische Feld senkrecht auf der Oberfläche der Kugel steht.*

Das elektrische Feld ist gegeben durch $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r})$, wobei wir den ∇ -Operator in Kugelkoordinaten verwenden

$$\nabla = \mathbf{e}_r \partial_r + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \partial_\theta + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{r \sin(\theta)} \partial_\phi. \tag{7}$$

Wir wollen das elektrische Feld auf der Kugeloberfläche, also für $r \searrow R$ berechnen. Das Potential (6) hängt nicht vom Azimutalwinkel φ ab, daher verschwindet die Komponente des elektrischen Feldes in Richtung $\mathbf{e}_\phi$.

Die Ableitung des Potentials nach dem Polarwinkel θ verschwindet ebenfalls auf der Kugeloberfläche,

$$-\partial_\theta \phi(\mathbf{r})|_{\bar{r} \propto \bar{R}} = \left[\frac{\bar{r} \sin(\theta)}{(1 + \bar{r}^2 - 2\bar{r}\cos(\theta))^{3/2}} - \frac{\bar{r} \sin(\theta)}{(\bar{R}^2 + \bar{r}^2/\bar{R}^2 - 2\bar{r}\cos(\theta))^{3/2}} \right]_{\bar{r}=\bar{R}} = 0. \tag{8}$$

Damit ist das elektrische Feld auf der Kugeloberfläche parallel zu $\mathbf{e}_r$ und gegeben durch

$$\mathbf{E}(\bar{\mathbf{r}})|_{r=R} = -\mathbf{e}_r \frac{1}{a} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{r}} \Big|_{r=R} = -\mathbf{e}_r \frac{\bar{q}}{a} \frac{1 - \bar{R}^2}{\bar{R}[1 + \bar{R}^2 - 2\bar{R}\cos(\theta)]^{3/2}}. \tag{9}$$

Oder ausgedrueckt durch, R , a , q und r ,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})|_{r=R} = \mathbf{e}_r \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a^2 - R^2}{R[a^2 + R^2 - 2aR\cos(\theta)]^{3/2}}. \tag{10}$$

- (c) *Welche Kraft wirkt auf die Ladung?*

Aus dem Potential (6) ergibt sich die Kraft, welche auf die Punktladung q wirkt. Dabei muss die unendliche Selbstwechselwirkung (der erste Term in Gl. (6)) ignoriert werden. Die Ladung q erfährt daher nur die Kraft hervorgerufen durch die

Oberflächenladung, welche äquivalent zur Bildladung ist,

$$\mathbf{F} = q \mathbf{E}_{\text{Bildl.}}(a \mathbf{e}_z) = -q \mathbf{e}_r \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \frac{-\bar{q}}{\sqrt{\bar{R}^2 + \frac{\bar{r}^2}{R^2} - 2\bar{r} \cos(\theta)}} \Big|_{r=a} = -\mathbf{e}_r \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{aR}{(a^2 - R^2)^2}. \quad (11)$$

Die Ableitung $\partial_\theta \phi$ verschwindet im Punkt $r = a$, $\theta = 0$.

- (d) Berechnen Sie die auf der Oberfläche der Kugel induzierte Flächenladungsdichte σ . Zeigen Sie, dass die gesamte, auf der Oberfläche induzierte Ladung genau der Spiegelladung entspricht.

Nach dem Gaußschen Gesetz ist die Oberflächenladung σ auf der Kugeloberfläche gegeben durch die Unstetigkeit des elektrischen Feldes an der Grenzschicht mit Normalen $\pm \mathbf{e}_r$,

$$\sigma = \epsilon_0 \mathbf{e}_r \cdot [\mathbf{E}(r \searrow R) - \mathbf{E}(r \nearrow R)] . \quad (12)$$

Da das elektrische Feld im Innenraum verschwindet erhalten wir mit der Gl. (10)

$$\sigma_{\text{Oberfl.}} = \frac{-q}{4\pi} \frac{a^2 - R^2}{R[a^2 + R^2 - 2aR \cos(\theta)]^{3/2}} . \quad (13)$$

Und für die gesamte Oberflächenladung erhalten wir durch Integration von Gl. (13),

$$\begin{aligned} Q_{\text{Oberfl.}} &= -\frac{q}{4\pi} \int_{-1}^1 d\cos(\theta) \int_0^{2\pi} d\phi R^2 \frac{a^2 - R^2}{R[a^2 + R^2 - 2aR \cos(\theta)]^{3/2}} \\ &= -\frac{q}{2} \frac{(a^2 - R^2)}{2a} \int_{-1}^1 dz \frac{1}{[a^2 + R^2 - z]^3/2} = -q \frac{R}{a} . \end{aligned} \quad (14)$$

Wie erwartet ist die gesamte Oberflächenladung gleich der Spiegelladung aus Gl. (5).

3. Kapazität:

(10 Punkte)

N.B.: Der Übersicht halber sind die Rechnungen hier in Gauss-Einheiten durchgeführt. Bei allen Ergebnissen ist der Umrechnungsfaktor zu SI Einheiten in **blau** angegeben.

- (a) Die Kapazität pro Längeneinheit eines langen Zylinderkondensators soll berechnet werden. Die innere metallische Elektrode mit Radius a trägt die Ladung Q pro Längenelement l . Ein Metallblech mit Radius b umgibt den inneren Zylinder konzentrisch und trägt die Ladung $-Q$ pro Längenelement.

Das elektrische Feld $\vec{E}(r)$ und das Potential $\Phi(r)$ waren im Blatt 2 berechnet.

1. Bestimmen Sie die Energie W pro Längenelement in dem Kondensator durch das Volumenintegral einmal über $\vec{E}^2(\vec{r})$ und einmal über $\rho(\vec{r})\Phi(\vec{r})$.

$$W = \frac{1}{8\pi} \int d^3x |\vec{E}|^2 = \frac{l}{4} \int_a^b dr r \left(\frac{2Q}{rl} \right)^2 = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \right) \frac{Q^2}{l} \ln \frac{b}{a}. \quad (15)$$

Alternativ

$$W = \frac{1}{2} \int d^3x \rho(\vec{x}) \Phi(\vec{x}) = \pi l \frac{2Q}{l} \sigma_b \ln b/a = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \right) \frac{Q^2}{l} \ln b/a. \quad (16)$$

2. Geben Sie die Kapazität des Kondensators pro Längeneinheit an.

$$U = \Phi(a) - \Phi(b) = \frac{2Q}{l} \ln b/a \quad (17)$$

und folglich

$$C = (4\pi\epsilon_0 \times) \frac{l}{2 \ln b/a}. \quad (18)$$

3. Wie groß ist der innere Durchmesser des äußeren Leiters eines luftgefüllten Koaxialkabels, dessen zentral gelegener Leiter ein zylindrisches Kabel mit dem Durchmesser $d = 1\text{mm}$ ist, und dessen Kapazität pro Längeneinheit $3 \times 10^{-11} \text{F/m}$ ist?

Umstellen der Formel aus 1. liefert

$$b = a e^{\frac{2\pi\epsilon_0}{C/l}} = 3.2\text{mm}. \quad (19)$$

(b) Berechnen Sie die Kapazität C folgender Kondensatoren:

Wir nehmen Gesamtladungen von $\pm Q$ wobei $Q > 0$ an.

1. zwei große ebene, leitende Flächen der Größe A im Abstand d zueinander (Inhomogenitäten des Randfeldes können vernachlässigt werden)

Wir wählen quaderförmige Integrationsvolumina die keine, eine bzw. beide Platten einschließen und finden

$$E_z(z) = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \right) \frac{4\pi Q}{A} \theta(z) \theta(d-z),$$

wobei die Platte mit Ladungsdichte Q/A ($-Q/A$) im gewählten Koordinatensystem bei $z = 0$ ($z = d$) ist.

Folglich ist $U = \frac{4\pi Q}{A} d$ und

$$C = (4\pi\epsilon_0 \times) \frac{A}{4\pi d} \quad (20)$$

2. zwei konzentrische leitende Kugeln mit den Radien a, b , mit $b > a$

Die Anwendung des Gauß'schen Satzen mit kugelförmigen Integrationsvolumina liefert

$$r^2 E_r(r) = Q \theta(r-a) \theta(b-r).$$

Folglich ist

$$U = \left| - \int_a^b E_r(r) \right| = Q \frac{b-a}{ab},$$

und

$$C = (4\pi\epsilon_0 \times) \frac{ab}{b-a}. \tag{21}$$