Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Klassische Theoretische Physik III   WS 2014/2015

Prof. Dr. A. Shnirman | **Blatt 5**
Dr. B. Narozhny | **Abgabe 21.11.2014, Besprechung 26.11.2014**

---

1. Multipolentwicklung: (10 Punkte)

Berechnen Sie das Potential in grosser Entfernung $r \gg a$ als Multiploentwicklung (bis zu max. Quadrupoltermen) der folgenden Punktladungsverteilungen:

(a) Ladung $-q$ im Ursprung, $3q$ bei $(0, 0, a)$

(b) Ladung $3q$ im Ursprung, $-q$ bei $(0, 0, -a)$

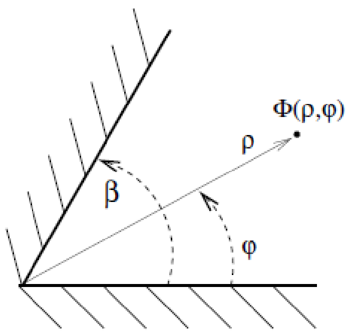
(c) Ladung $-q$ im Ursprung, $3q$ bei $(a, 0, 0)$

(d) Ladung $-2q$ im Ursprung, q bei $(a, 0, 0)$, q bei $(0, 0, -a)$

(e) Finden Sie eine Konfiguration von Punktladungen auf einer Linie, so dass die Multipolentwicklung des Potentials mit dem Oktupolterm beginnt.

2. Zylinderkoordinaten: (10 Punkte)

Betrachtet werden soll eine Ecke aus zwei leitenden, unendlich ausgedehnten, geerdeten Ebenen.



(a) Schreiben Sie die Laplace-Gleichung in Zylinderkoordinaten.

(b) Zeigen Sie, dass alle Lösungen der Laplace-Gleichung mit den obengenannten Randbedingungen unabhängig von z sind.

(c) Verwenden Sie den Separationsansatz

$$\Phi(r, \varphi) = R(r)S(\varphi),$$

und reduzieren Sie die Laplace-Gleichung auf zwei Differentialgleichungen für jeweils $R(r)$ und $S(\varphi)$.

(d) Zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung mit der Randbedingung eines verschwindenden Potentials auf den Oberflächen die folgende Form annimmt:

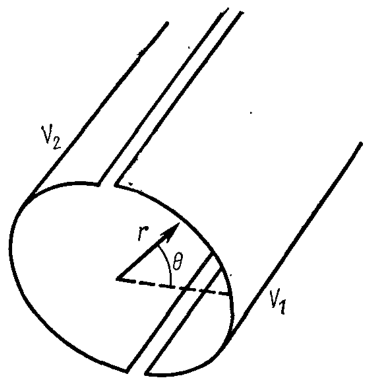
$$\Phi(r,\varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m r^{m\pi/\beta} \sin\left(\frac{m\pi}{\beta}\varphi\right).$$

(e) Zeigen Sie, dass die Funktionen $\sin(m\pi\varphi/\beta)$ ein vollständiges Orthonormalsystem formen (unter Betrachtung der Randbedingungen). Finden Sie die entsprechenden Normierungskonstanten.

(f) In der Vorlesung haben sie das Theorem kennengelernt, welches die Eindeutigkeit des Dirichletproblems sicherstellt. Hier erfüllt die triviale Lösung $\Phi = 0$ die Laplace-Gleichung und zugleich die Randbedingungen. Gibt es hier einen Widerspruch mit der Lösung $\Phi(r,\varphi)$ [siehe Aufgabe (d)]?

3. Leitender Zylinder: (10 Punkte)

Betrachten Sie einen Leiter, der die Form einer zylindrischen Oberfläche hat, und in zwei Teile geschnittet wird (siehe Abbildung). Die zwei Halbzylinder sind voneinander isoliert und liegen auf unterschindlichen Potentialen V_1 und V_2 (die Dicke der isolierenden Schicht zwischen den Teilen ist viel kleiner als der Radius, $\delta \ll R$).



Zeigen Sie, dass das Skalarpotential innerhalb des Zylinders durch

$$\Phi = \frac{V_1 + V_2}{2} + 2\frac{V_1 - V_2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{2m-1} \left(\frac{r}{R}\right)^{2m-1} \cos\left[(2m-1)\theta\right],$$

gegeben ist.

Hinweis: Benutzen Sie Ihre Erfahrungen aus der Aufgabe 2.