

Klassische Theoretische Physik III WS 2014/2015

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. B. NarozhnyBlatt 5
Lösungen

1. Multipolentwicklung:

(2+2+2+2+2=10 Punkte)

Berechnen Sie das Potential in grosser Entfernung $r \gg a$ als Multiploentwicklung (bis zu max. Quadrupoltermen) der folgenden Punktladungsverteilungen:

Im kartesischen Koordinatensystem sind die Multipolmomente für eine Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ wie folgt definiert:

$$\text{Monopol} \quad q_m = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \rho(\vec{r})$$

$$\text{Dipol} \quad \vec{d} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r r \vec{r} \rho(\vec{r})$$

$$\text{Quadrupol} \quad Q_{\alpha\beta} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r (3r_\alpha r_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}) \rho(\vec{r})$$

Für eine diskrete Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}) = \sum_a q_a \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_a)$ ergeben sich folgende Formen:

$$\text{Monopol} \quad q_m = \sum_a q_a$$

$$\text{Dipol} \quad \vec{d} = \sum_a \vec{r}_a q_a$$

$$\text{Quadrupol} \quad Q_{\alpha\beta} = \sum_a (3r_{a,\alpha} r_{a,\beta} - r_a^2 \delta_{\alpha\beta}) q_a$$

Für die Näherung des Potentials im Fernfeld gilt der Ausdruck

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_m}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{d}}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{Q_{\alpha\beta} r_\alpha r_\beta}{r^5} + \dots \right), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

(a) Ladung $-q$ im Ursprung, $3q$ bei $(0, 0, a)$

Das Monopolmoment:

$$q_m = -q + 3q = 2q.$$

Das Dipolmoment:

$$\vec{d} = 3qa\vec{e}_z.$$

Das Quadrupolmoment ist

$$Q_{\alpha\beta} = 3qa^2(3\delta_{\alpha,z}\delta_{\beta,z} - \delta_{\alpha\beta}) \quad \Rightarrow \quad \hat{Q} = -3qa^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Somit ist das Potential im Fernfeld durch

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2q}{r} + \frac{3qaz}{r^3} + \frac{3qa^2}{2r^5} (2z^2 - x^2 - y^2) + \dots \right)$$

gegeben.

(b) *Ladung 3q im Ursprung, -q bei (0, 0, -a):*

Das Monopolmoment:

$$q_m = 3q - q = 2q.$$

Das Dipolmoment:

$$\vec{d} = qa\vec{e}_z.$$

Das Quadrupolmoment ist

$$Q_{\alpha\beta} = -qa^2(3\delta_{\alpha,z}\delta_{\beta,z} - \delta_{\alpha\beta}) \quad \Rightarrow \quad \hat{Q} = qa^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Somit ist das Potential im Fernfeld durch

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2q}{r} + \frac{qaz}{r^3} + \frac{qa^2}{2r^5} (x^2 + y^2 - 2z^2) + \dots \right)$$

gegeben.

(c) *Ladung -q im Ursprung, 3q bei (a, 0, 0)*

Das Monopolmoment:

$$q_m = -q + 3q = 2q.$$

Das Dipolmoment:

$$\vec{d} = 3qa\vec{e}_x.$$

Das Quadrupolmoment ist

$$Q_{\alpha\beta} = 3qa^2(3\delta_{\alpha,x}\delta_{\beta,x} - \delta_{\alpha\beta}) \quad \Rightarrow \quad \hat{Q} = 3qa^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Somit ist das Potential im Fernfeld durch

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2q}{r} + \frac{3qax}{r^3} + \frac{3qa^2}{2r^5} (2x^2 - y^2 - z^2) + \dots \right)$$

gegeben.

- (d) Ladung $-2q$ im Ursprung, q bei $(a, 0, 0)$, q bei $(0, 0, -a)$

Das Monopolmoment:

$$q_m = -2q + q + q = 0.$$

Das Dipolmoment:

$$\vec{d} = qa\vec{e}_x - qa\vec{e}_z.$$

Das Quadrupolmoment ist

$$Q_{\alpha\beta} = qa^2(3\delta_{\alpha,x}\delta_{\beta,x} + 3\delta_{\alpha,z}\delta_{\beta,z} - 2\delta_{\alpha\beta}) \Rightarrow \hat{Q} = qa^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit ist das Potential im Fernfeld durch

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{qa(x-z)}{r^3} + \frac{qa^2}{2r^5}(x^2 - 2y^2 + z^2) + \dots \right)$$

gegeben.

- (e) Finden Sie eine Konfiguration von Punktladungen auf einer Linie, so dass die Multipolentwicklung des Potentials mit dem Oktupolterm beginnt.

Da man mit 3 Ladungen auf einer Linie immer ein endliches Quadrupolmoment erhält, wenn Monopol- und Dipolmomente verschwinden, nehmen wir den Ansatz, dass wir vier Ladungen haben.

Lösungsvorschlag:

$$q_1 = q, x_1 = -na; \quad q_2 = -nq, x_2 = -a; \quad q_3 = nq, x_3 = a; \quad q_4 = -q, x_4 = na.$$

2. Zylinderkoordinaten:

(2+1+1+2+1+3=10 Punkte)

Betrachtet werden soll eine Ecke aus zwei leitenden, unendlich ausgedehnten, geerdeten Ebenen.

- (a) Schreiben Sie die Laplace-Gleichung in Zylinderkoordinaten:

Die Laplace-Gleichung:

$$\Delta\Phi = 0.$$

Der Laplace-Operator in kartesischen Koordinaten

$$\Delta\Phi(x, y, z) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}.$$

Die Zylinderkoordinaten:

$$(x, y, z) \Rightarrow (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z).$$

Der Laplace-Operator durch den Nabla-Operator

$$\Delta = \vec{\nabla}^2.$$

Um den Nabla-Operator in Zylinderkoordinaten zu finden, betrachten wir das Differential:

$$df(r, \varphi, z) = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} dz.$$

Man kann das Differential auch geometrisch betrachten:

$$df = (\vec{\nabla} f)_r ds_r + (\vec{\nabla} f)_\varphi ds_\varphi + (\vec{\nabla} f)_z ds_z = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{s}.$$

Das Längenelement ist

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2.$$

Deswegen,

$$ds_r = dr, \quad ds_\varphi = r d\varphi.$$

Damit finden wir das Nabla-Operator:

$$\vec{\nabla} f = \vec{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Jetzt berechnen wir den Laplace-Operator. Die Einheitsvektoren sind

$$\vec{e}_r = \vec{e}_x \cos \varphi + \vec{e}_y \sin \varphi, \quad \vec{e}_\varphi = -\vec{e}_x \sin \varphi + \vec{e}_y \cos \varphi,$$

und zwar

$$\begin{aligned} \Delta = \vec{\nabla}^2 &= \left(\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left[\vec{e}_\varphi \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_r \right) \right] \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Deswegen, die Laplace-Gleichung in Zylinderkoordinaten ist:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

- (b) Zeigen Sie, dass alle Lösungen der Laplace-Gleichung mit den obengenannten Randbedingungen unabhängig von z sind:

Da die Randbedingungen unabhängig von der z -Koordinate sind, hängt das Potential von z auch nicht ab.

(c) Verwenden Sie den Separationsansatz ...

Wir setzen $\Phi(r, \varphi, z) = R(r)S(\varphi)$ in die Definition des Laplace-Operators ein. Da Φ nicht von z abhängt, fällt der Term mit der z -Ableitung sofort weg. Wir suchen nun nach Lösungen der Laplace-Gleichung $\Delta\Phi = 0$,

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right] R(r)S(\varphi) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} R(r)S(\varphi) = 0.$$

Wir multiplizieren die Gleichung mit r^2 und teilen sie durch Φ . Da $S(\varphi)$ nicht von r abhängt, kann man es als Konstante vor die r -Ableitung ziehen, das gleiche gilt für $R(r)$ und die φ -Ableitung. Wir erhalten nun

$$\frac{r^2}{R(r)} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right] R(r) + \frac{1}{S(\varphi)} \frac{\partial^2 S(\varphi)}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Da der erste Term nur von r (aber nicht von φ) und der zweite Term nur von φ (aber nicht von r) abhängt, müssen beide Terme konstant sein. Es folgt daher, dass

$$\frac{r^2}{R(r)} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right] R(r) = c, \quad \frac{1}{S(\varphi)} \frac{\partial^2 S(\varphi)}{\partial \varphi^2} = -c,$$

womit wir die partielle Differentialgleichung in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen separiert haben.

(d) Zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung mit der Randbedingung eines verschwindenden Potentials auf den Oberflächen die gegebene Form annimmt.

Wir fangen mit der zweiten Gleichung an, die wir mit $S(\varphi)$ durchmultiplizieren und alles auf eine Seite bringen:

$$\frac{\partial^2 S(\varphi)}{\partial \varphi^2} + cS(\varphi) = 0.$$

Wenn wir davon ausgehen, dass $c > 0$, dann sind die Lösungen

$$S(\varphi) = A \cos(\omega\varphi) + B \sin(\omega\varphi), \quad \omega^2 = c.$$

Da wir annehmen, dass beide Leiterplatten geerdet sind, muss $S(\varphi = 0) = 0$ und $S(\varphi = \beta) = 0$ gelten, somit erhalten wir

$$A = 0, \quad \omega = \frac{m\pi}{\beta}.$$

Der Vorfaktor B ist beliebig. Wir können B in die globale Konstante des Gesamtpotentials Φ absorbieren.

Die Lösung für $c < 0$ tritt **nicht** auf, da die Lösung daraufhin eine Kombination aus hyperbolischen Funktionen ($\sinh(x)$, $\cosh(x)$) gewesen wäre, die aber in jeder Kombination maximal eine Nullstelle besitzen, weswegen die Lösung auf Grund des physikalischen Problems nicht erlaubt ist.

Ebenfalls irrelevant ist der Fall $c = 0$, da die Gleichung sonst auf $\partial_\varphi^2 S(\varphi) = 0$ reduzieren würde. Diese hat $S(\varphi) = A\varphi + B$ als allgemeine Lösung, welche aber außer für $A = B = 0$ nie $S(0) = S(\beta) = 0$ erfüllen kann. Somit ist diese Lösung durch die Randbedingungen ebenfalls nicht erlaubt.

Betrachten wir jetzt die erste Gleichung:

$$r^2 R''(r) + r R'(r) - c R(r) = 0.$$

Da dies eine skaleninvariante Gleichung ist ($r \rightarrow lr$ würde nichts an dem Verhältnis der Koeffizienten der Terme zueinander ändern), wählen wir ein Potenzgesetz, $R(r) = r^\lambda$ als Lösungsansatz. Eingesetzt ergibt dies

$$r^2 \lambda(\lambda - 1) r^{\lambda-2} + r \lambda r^{\lambda-1} - c r^\lambda = 0.$$

Dividieren wir diese Gleichung durch r^λ , so ergibt sich

$$\lambda^2 - \lambda + \lambda - c = 0,$$

folglich also

$$\lambda = \pm \sqrt{c} = \pm \frac{m\pi}{\beta}.$$

Da $R(r)$ für $r = 0$ (in der Ecke) wohldefiniert und gleich 0 sein sollte, legt dies uns das Vorzeichen für λ fest. Damit ist

$$R(r) = r^{m\pi/\beta}.$$

Somit haben wir die Lösung des Gleichungssystems unter den gegebenen Randbedingungen bestimmt, und diese ist gegeben durch

$$\Phi = Z_0 r^{m\pi/\beta} \sin \frac{m\pi\varphi}{\beta}.$$

Da m aber beliebig aus $\mathbb{N}$ ist, kann die allgemeinste Lösung unter der gegebenen Randbedingung auch eine beliebige Linearkombination mit verschiedenen m sein. Daher ist die allgemeine Lösung des Problems gegeben durch

$$\Phi(r, \varphi, z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m r^{m\pi/\beta} \sin \frac{m\pi\varphi}{\beta}.$$

- (e) Zeigen Sie, dass die Funktionen $\sin(m\pi\varphi/\beta)$ ein vollständiges Orthonormalsystem formen (unter Betrachtung der Randbedingungen). Finden Sie die entsprechenden Normierungskonstanten

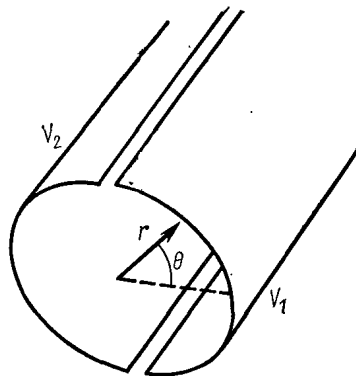
$$\int_0^\beta d\varphi \sin \frac{m\pi\varphi}{\beta} \sin \frac{n\pi\varphi}{\beta} = \frac{\beta}{2} \delta_{mn}.$$

- (f) In der Vorlesung haben sie das Theorem kennengelernt, welches die Eindeutigkeit des Dirichletproblems sicherstellt. Hier erfüllt die triviale Lösung $\Phi = 0$ die Laplace-Gleichung und zugleich die Randbedingungen. Gibt es hier einen Widerspruch mit der Lösung $\Phi(r, \varphi)$ [siehe Aufgabe (d)]?

Wir haben nun gezeigt, dass die Lösung die obige Form haben muss, die a_m sind aber weiterhin unbestimmt. Um diese weiter zu bestimmen, benötigen wir noch zusätzliche Randbedingungen. Wenn wir aus physikalischen Gründen erfordern, dass das Potential im unendlichen verschwindet, sind alle $a_m = 0$, was zu erwarten war, denn dies ist die Konstruktion eines geerdeten Faraday'schen Käfig, innerhalb dessen das Potential verschwindet.

3. Leitender Zylinder:

Betrachten Sie einen Leiter, der die Form einer zylindrischen Oberfläche hat, und in zwei Teile geschnitten wird (siehe Abbildung). Die zwei Halbzylinder sind voneinander isoliert und liegen auf unterschiedlichen Potentialen V_1 und V_2 (die Dicke der isolierenden Schicht zwischen den Teilen ist viel kleiner als der Radius, $\delta \ll R$). Finden Sie das Skalarpotential innerhalb des Zylinders.



Wir verwenden den Separationsansatz von Aufgabe 2. Dann

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^m [A_m \cos(m\theta) + B_m \sin(m\theta)].$$

Auf der Oberfläche

$$\Phi(r = R, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} [A_m \cos(m\theta) + B_m \sin(m\theta)].$$

Die Funktion $\Phi(r = R, \theta)$ ist durch der Randbedingungen gegeben und zwar

$$\Phi(r = R, \theta) = \begin{cases} V_1, & -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, \\ V_2, & \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

Die Wahl der genauen Randbedingungen ist auf der Bild gezeichnet. Dann hat das Potential auf der Oberfläche die folgende Eigenschaft

$$V(R, \theta) = V(R, -\theta).$$

Dann können wir den Ansatz vereinfachen, weil in diesem Fall gilt es

$$B_m = 0.$$

Die Koeffizienten A_m finden wir von der Fourier-Entwicklung. Wir vergleichen die zwei Fourier-Integrale:

$$\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} V(R, \theta) \cos(n\theta) d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} V_1 \cos(n\theta) d\theta + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} V_2 \cos(n\theta) d\theta = \frac{2(V_1 - V_2)}{n} \sin \frac{n\pi}{2}, \quad n \neq 0,$$

und

$$\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} V(R, \theta) \cos(n\theta) d\theta = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \cos(m\theta) \cos(n\theta) d\theta = \pi A_n, \quad n \neq 0.$$

Für $n = 0$ finden wir

$$\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} V(R, \theta) d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} V_1 d\theta + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} V_2 d\theta = \pi(V_1 + V_2),$$

$$\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} V(R, \theta) d\theta = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \cos(m\theta) d\theta = 2\pi A_0.$$

Deswegen

$$2\pi A_0 = \pi(V_1 + V_2), \quad \pi A_{n \neq 0} = \frac{2(V_1 - V_2)}{n} \sin \frac{n\pi}{2}.$$

Das ergibt das Ergebnis

$$\Phi = \frac{V_1 + V_2}{2} + 2 \frac{V_1 - V_2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{2m-1} \left(\frac{r}{R}\right)^{2m-1} \cos[(2m-1)\theta],$$