

Klassische Theoretische Physik III WS 2014/2015**Prof. Dr. A. Shnirman**
Dr. B. Narozhny**Blatt 6**
Lösungen**1. Kugelflächenfunktionen:**

(10 Punkte)

Betrachten Sie eine Kugelschale mit Radius R , die auf folgendem Potential liegt:

$$\Phi = V \cos \theta \sin^2 \theta, \quad (0 \leq \theta \leq \pi).$$

Berechnen Sie das Potential im Aussen- und Innenraum jeweils als Entwicklung in Kugelflächenfunktionen bis zu $l = 3$.

Die Kugelflächenfunktionen

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = N_l^m P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad N_l^m = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}}, \quad P_l^0(\xi) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d\xi^l} (\xi^2 - 1)^l,$$

bilden eine orthonormierte Basis eines abstrakten Vektorraumes. Auf diesem kann man ein Skalarprodukt definieren

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi f^*(\theta, \phi) g(\theta, \phi).$$

Die Orthonormierung führt im Fall der Kugelflächenfunktionen zu der Identität

$$\langle Y_{lm}, Y_{l'm'} \rangle = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'}.$$

Die Entwicklung einer hinreichend gutartigen Funktion auf der Einheitskugel, $g(\theta, \phi)$ in Kugelflächenfunktionen folgt der Form

$$g(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l C_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi).$$

Die Koeffizienten lassen sich durch Projektion mit Hilfe der Orthonormalitätsrelation bestimmen:

$$\begin{aligned} \langle Y_{lm}, g \rangle &= \left\langle Y_{lm} \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} C_{l'm'} Y_{l'm'} \right\rangle = \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} C_{l'm'} \langle Y_{lm}, Y_{l'm'} \rangle \\ &= \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} C_{l'm'} \delta_{l,l'} \delta_{m,m'} = C_{lm}. \end{aligned}$$

Ausgeschrieben ergibt sich also die Formel für die Koeffizienten von $g(\theta, \phi)$:

$$C_{lm} = \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi Y_{lm}^*(\theta, \phi) g(\theta, \phi).$$

Um das Potential zu entwickeln, betrachten wir es bei der gegebenen Randbedingung $r = R$. Die Koeffizienten sind also

$$C_{lm} = V \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi Y_{lm}^*(\theta, \phi) \cos \theta \sin^2 \theta.$$

Da das Problem rotationssymmetrisch um die z -Achse ist, tragen nur Kugelflächenfunktionen mit $m = 0$ bei, weil alle anderen Kugelflächenfunktionen eine Abhängigkeit vom Winkel ϕ haben. Die einzige ϕ -Abhängigkeit des Integranden kommt aus der Kugelflächenfunktion, welche den Term $e^{im\phi}$ enthält. Da

$$\int_0^{2\pi} e^{im\phi} d\phi = 0 \quad \forall m \neq 0,$$

haben wir damit alle Koeffizienten mit $m \neq 0$ bereits berechnet. Bei $m = 0$ trägt dieses Integral mit einem Faktor von 2π bei.

Es bleibt also das Integral

$$C_{l0} = 2\pi N_l^0 V \int_0^\pi d\theta \sin \theta P_l^0(\cos \theta) \cos \theta \sin^2 \theta$$

zu berechnen. Durch die bekannte Substitution $\xi = \cos \theta$, erhalten wir

$$C_{l0} = 2\pi N_l^0 V \int_{-1}^1 d\xi P_l^0(\xi) \xi (1 - \xi^2) = 2\pi N_l^0 V \int_0^1 d\xi [P_l^0(\xi) - P_l^0(-\xi)] \xi (1 - \xi^2).$$

Für alle *geraden* Polynomen verschwinden dann die Koeffizienten

$$C_{2k0} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_{00} = C_{20} = \dots = 0.$$

Ungerade Polynomen bis zu $l = 3$ sind

$$P_1^0 = x, \quad P_3^0 = \frac{1}{2} (5x^3 - 3x).$$

Deswegen

$$C_{10} = 2\pi V \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{4}{15} = \frac{4V}{5} \sqrt{\frac{\pi}{3}}, \quad C_{30} = 2\pi V \sqrt{\frac{7}{4\pi}} \left(-\frac{4}{35}\right) = -\frac{4V}{5} \sqrt{\frac{\pi}{7}}.$$

Das Potential im Innenraum

Im Innenraum muss das Potential bei $r = 0$ wohldefiniert sein, d.h. Terme $r^{-(l+1)}$ dürfen nicht auftreten. Daher müssen die B_{lm} im Innenraum gleich 0 sein und die A_{lm} sind dann durch

$$A_{lm} = C_{lm}/R^l$$

gegeben, wenn man Φ am Rand bei $r = R$ auswertet und dann C_{lm} mit $A_{lm}r^l$ gleichsetzt. Auf diesem Weg erhalten wir

$$\Phi(r \leq R, \theta, \phi) = \sum_l C_{l0} \frac{r^l}{R^l} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l^0(\cos \theta),$$

und die ersten Terme sind

$$\Phi(r \leq R, \theta, \phi) \approx \frac{2V}{5} \frac{r}{R} \cos \theta \left[1 - \frac{r^2}{2R^2} (5 \cos^2 \theta - 3) + \dots \right].$$

Das Potential im Außenraum

Im Außenraum muss das Potential bei $r = \infty$ verschwinden, d.h. Terme r^l dürfen nicht auftreten. Daher müssen die A_{lm} im Außenraum gleich 0 sein und für die B_{lm} erhält man

$$B_{lm} = C_{lm} R^{l+1}.$$

Die Entwicklung des Potentials ist damit durch

$$\Phi(r \geq R, \theta, \phi) = \sum_l C_{l0} \frac{R^{l+1}}{r^{l+1}} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l^0(\cos \theta)$$

gegeben und die ersten Terme sind

$$\Phi(r \geq R, \theta, \phi) \approx \frac{2V}{5} \frac{R^2}{r^2} \cos \theta \left[1 - \frac{R^2}{2r^2} (5 \cos^2 \theta - 3) + \dots \right].$$

2. Multipolentwicklung:

(10 Punkte)

Zwei Kreisringe [Radius R und Mittelpunkt $(0, 0, a)$ bzw. $(0, 0, -a)$] sind homogen mit der Ladung q_1 bzw. q_2 geladen und liegen in den Ebenen $z = a$ bzw. $z = -a$. Berechnen Sie das Potential als Multipolentwicklung in Kugelkoordinaten bis einschliesslich dem Quadrupolterm im Bereich $r_0 \gg \sqrt{R^2 + a^2}$. Welche Terme verschwinden für $q_1 = q_2$, bzw. $q_1 = -q_2$?

Da die Ringe homogen sind, besteht keinerlei ϕ -Abhängigkeit.

Die Multipolentwicklung in Kugelkoordinaten:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{q_{lm}}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \phi) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \frac{q_{l0}}{r^{l+1}} Y_{l0}(\theta, \phi).$$

Die Kugelflächenfunktionen in Kugelkoordinaten:

l	m	$Y_{lm}(\theta, \phi)$
0	0	$\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$
1	0	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$
1	1	$-\sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{i\phi} \sin \theta$
2	0	$\sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1)$
2	1	$-\sqrt{\frac{15}{8\pi}} e^{i\phi} \sin \theta \cos \theta$
2	2	$\sqrt{\frac{15}{32\pi}} e^{2i\phi} \sin^2 \theta$

Da das Problem rotationssymmetrisch um die z -Achse ist, fallen in der Entwicklung alle $m \neq 0$ -Terme weg (siehe Aufgabe 1). Damit bleiben hier nur die drei Momente q_{00} , q_{10} und q_{20} übrig bis $l = 2$.

Im Kartesischen gilt, dass das Monopolmoment einfach die Summe aller Ladungen ist, d.h. $q_m = q_1 + q_2$. Das sphärische Monopolmoment ist durch

$$q_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int d^3r \rho(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} (q_1 + q_2),$$

gegeben.

Das Dipolmoment kann aus Symmetriegründen nur in z -Richtung zeigen und muss daher im Kartesischen $\vec{d} = a(q_1 - q_2)\vec{e}_z$ sein. Das sphärische Dipolmoment ist durch

$$q_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int d^3r \rho(\vec{r}) z = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} a(q_1 - q_2).$$

gegeben.

Hier $\rho(\vec{r})$ ist die Gesamtladungsdichte

$$\rho(\vec{r}) = \frac{\delta(r - \sqrt{R^2 + a^2})}{2\pi(R^2 + a^2)} \left[q_1 \delta\left(\cos \theta - \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}}\right) + q_2 \delta\left(\cos \theta + \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}}\right) \right].$$

Das Quadrupolmoment ist

$$q_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \int d^3r (3z^2 - r^2) \rho(\vec{r}) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (q_1 + q_2) [2a^2 - R^2].$$

Die Entwicklung des Potentials für allgemeine q_1 , q_2 im Fernfeld ergibt also den Ausdruck

$$\Phi(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1 + q_2}{r} + \frac{a(q_1 - q_2)}{r^2} \cos \theta + \frac{(2a^2 - R^2)(q_1 + q_2)}{4r^3} (3 \cos^2 \theta - 1) \right].$$

Bei $q_1 = q_2$ verschwindet das Dipolmoment, bei $q_1 = -q_2$ verschwinden die Monopol- und Quadrupolmomente. Dass das Quadrupolmoment hier verschwindet liegt allerdings an der Wahl des Koordinatensystems, nur das Monopolmoment verschwindet immer in jedem Koordinatensystem für $q_1 = -q_2$.

3. Ampère-Gesetz

(10 Punkte)

Zwei lange, schlanke Spulen mit Radien $a < b$ sind wie in Skizze auf der x -Achse angeordnet. Sie werden jeweils in entgegengesetzte Richtungen vom Strom I durchflossen. Die innere Spule hat Windungszahl n_1 pro Einheitslänge, die äussere Spule Windungszahl n_2 pro Einheitslänge.

Berechnen Sie das Magnetfeld für die Bereiche:

(a) Innerhalb der inneren Spule

Für die Lösung der Aufgabe benutzen wir das Ampère'sche Gesetz

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j},$$

jedoch in der Integralform

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int d\vec{A} \cdot \vec{j}.$$

Um das Magnetfeld im Inneren der beiden Spulen zu berechnen, legen wir ein Rechteck auf die $y - z$ Ebene, dessen zwei Seiten parallel zur x -Achse verlaufen. Eine dieser Seiten liegt innerhalb der inneren Spule, die andere Seite außerhalb der äusseren Spule (siehe Skizze a).

Für lange schlanke Spulen ist das Magnetfeld im Inneren der Spule homogen und parallel zur x -Achse ausgerichtet, sofern man weit genug von deren Ende entfernt ist. Das Feld außerhalb der Spule muss null sein, damit das Magnetfeld im Unendlichen verschwindet.

Somit finden wir

$$(B_i - \underbrace{B_{\text{außen}}}_{=0})h = \mu_0 I h (n_1 - n_2) \quad \Rightarrow \quad B_i = \mu_0 I (n_1 - n_2).$$

(b) Zwischen den beiden Spulen

Um das Magnetfeld im Zwischenraum zu berechnen, integrieren wir die Integralform des Ampère'schen Gesetzes über die Fläche b aus der Querschnittsfläche. Da das Magnetfeld der inneren Spule hier keinen Einfluss mehr hat (siehe Begründung aus Teilaufgabe a) ergibt sich

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int d\vec{A} \cdot \vec{j} \quad \Rightarrow \quad B_z = -\mu_0 n_2.$$

(c) Ausserhalb beider Spulen

$$B_{\text{außen}} = 0.$$

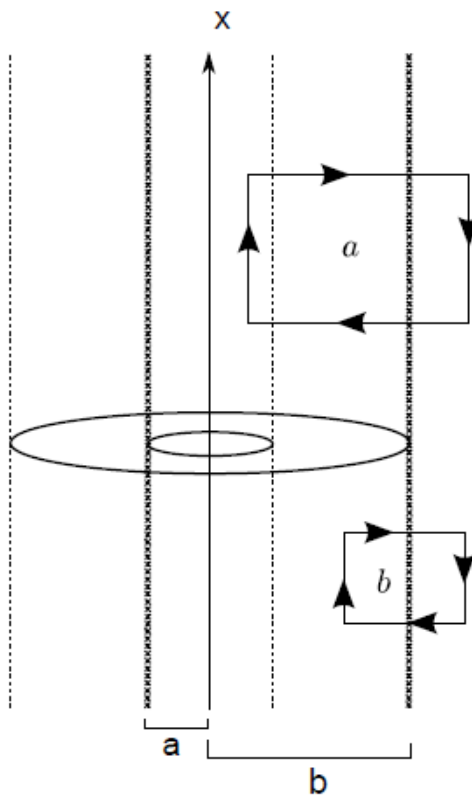


Abbildung 1: Schematische Skizze der Querschnittsfläche durch die beiden Spulen. Der Strom durch die Spulen fließt in unterschiedliche Richtungen und zeigt senkrecht auf die Bildebene (Punkte zeigen aus der Ebene hinaus, Kreuze zeigen in die Ebene hinein).