

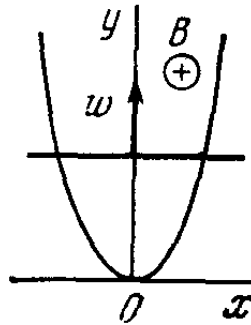
Klassische Theoretische Physik III WS 2014/2015

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. B. NarozhnyBlatt 8
Lösungen

1. Elektromagnetische Induktion:

(3+3+4=10 Punkte)

- (a) Ein dünner Leiter bildet eine Parabel in der xy -Ebene ($y = ax^2$). Ein homogenes, konstantes externes Magnetfeld zeigt entlang der z -Achse. Zur Zeit $t = 0$ beginnt ein waagrecht ausgerichteter Draht, der die beiden Parabelstücke verbindet, vom Scheitelpunkt aus mit einer konstanten Beschleunigung w nach oben zu gleiten (siehe Bild).



Finden Sie die elektromotorische Kraft in der Schleife als Funktion von y .

Nach der Lenz'schen Regel, fließt der Strom in der Schleife im Gegenuhrzeigersinn. von dem Faraday'schen Gesetz finden wir die EMK

$$\xi = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right|,$$

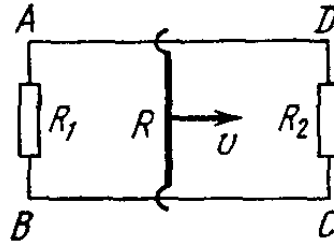
wobei

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = -2Bx dy, \quad y = ax^2, \quad x = \sqrt{\frac{y}{a}} \quad \frac{dy}{dt} = \sqrt{2wy}.$$

Deswegen

$$\xi = 2B \sqrt{\frac{y}{a}} \frac{dy}{dt} = By \sqrt{\frac{8w}{a}}.$$

- (b) Betrachten Sie eine rechteckige Schleife die in der Abbildung gezeigt ist.



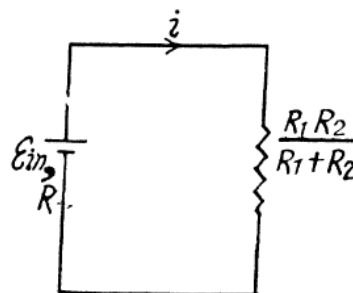
Der Verbinder hat den Widerstand R und die Kanten AB und CD haben die Widerstände R_1 und R_2 . Die Schleife befindet sich in einem homogenen, konstanten, senkrechten Magnetfeld. Vernachlässigen Sie die Selbstinduktivität der Schleife und finden Sie den Strom im Verbinder, wenn er sich mit einer konstanten Geschwindigkeit v bewegt.

Nehmen wir an, dass das Magnetfeld in die Seite hinein zeigt.
Die EMK ist (siehe Bild für die Richtung)

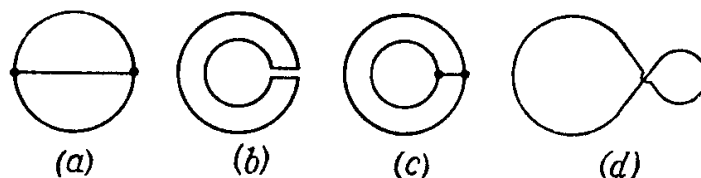
$$\xi = \left| \int d\vec{l} [\vec{v} \times \vec{B}] \right| = vBl.$$

Der Strom ist dann

$$I = \frac{\xi}{R + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = \frac{Bvl}{R + R_\mu}, \quad R_\mu = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$



- (c) Betrachten Sie die Leiterschleifen die in der Abbildung gezeigt sind. Die Schleifen befinden sich in einem homogenen, konstanten, senkrechten Magnetfeld.

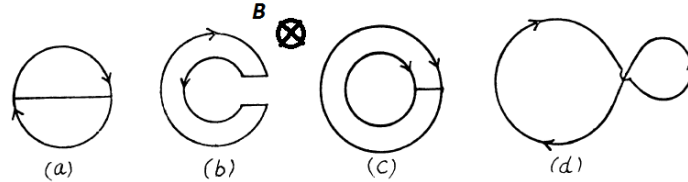


Finden Sie die Richtungen der induzierten Ströme wenn das Magnetfeld verringert wird.

Nach der Lenz'schen Regel wird durch eine Änderung des magnetischen Flusses durch eine Leiterschleife eine Spannung induziert, so dass der dadurch fließende

Strom ein Magnetfeld erzeugt, welches der Änderung des magnetischen Flusses entgegenwirkt.

Nehmen wir an, dass das Magnetfeld in die Seite hinein zeigt. Dann fließt der Strom in die Schleifen (a) und (c) im Uhrzeigersinn, aber nicht in den Verbindern (wegen Ladungserhaltung). In die Schleife (b) fließt der Strom im Uhrzeigersinn Außenteil entlang. In Schleife (d) fließt der Strom im Uhrzeigersinn in der linken Teil.



2. Induktivität:

(2+2+4+2=10 Punkte)

- (a) Berechnen Sie die Selbstinduktivität einer schlanken zylindrischen Spule mit Radius a , Länge $l \gg a$ und Windungszahl n .

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass der magnetische Fluss einer Anordnung von Leiterschleifen gegeben ist durch

$$\Phi_j = \sum_i M_{ji} I_i.$$

Die Elemente der Matrix M bezeichnen die Induktionskoeffizienten. Für $M_{ii} \equiv L_i$ spricht man von Selbstinduktivität.

Betrachtet man eine Spule als Anordnung von n identischen Leiterschleifen entlang einer Achse, so folgt ($I_i = I$)

$$\Phi_j = \sum_i M_{ji} I_i = I L_j$$

und daher für die Selbstinduktivität der Spule mit Windungszahl n

$$L = \frac{n\Phi}{I}$$

wobei hier jetzt L die Selbstinduktivität der gesamten Spule und nicht nur einer Schleife der Spule bezeichnet. Setzt man die Definition des magnetischen Flusses ein und verwendet das Ergebnis aus Aufgabe 3a.) von Blatt 6 für nur eine Spule. Damit erhält man

$$L = \mu_0 n^2 \pi \frac{a^2}{l}.$$

- (b) Eine Spule mit Radius a und Windungszahl n_1 liege innerhalb einer längeren Spule mit Radius $b > a$ und Windungszahl n_2 . Durch die innere Spule fließe ein Strom I_1 . Berechnen Sie den Gesamtfluss durch die äußere Spule aufgrund des Magnetfelds der kurzen Spule.

Wir benutzen, dass für die Gegeninduktivität gilt:

$$M_{12} = M_{21}.$$

Dann berechnen wir den Gesamtfluss durch die *innere* Spule aufgrund des Magnetfelds

$$B_2 \simeq \mu_0 \frac{n_2}{l_2} I_2$$

der äußeren Spule mit dem Strom I_2 (für $I_1 = 0$):

$$\Phi_1 = n_1 \pi a^2 B_2 = n_1 \pi a^2 \mu_0 \frac{n_2}{l_2} I_2 = M_{12} I_2,$$

wobei l_2 die Länge der äußeren Spule ist ($l_2 \gg b$). Es folgt

$$M_{21} = M_{12} = \frac{\pi a^2}{l_2} \mu_0 n_1 n_2$$

Damit ist der Gesamtfluss Φ_2 durch die äußere Spule:

$$\Phi_2 = M_{21} I_1 = \frac{\pi a^2}{l_2} \mu_0 n_1 n_2 I_1.$$

- (c) Berechnen Sie die Gegeninduktivität (Induktivitätskoeffizient M_{12}) zweier paralleler quadratischer Leiterschleifen mit Kantenlänge a . Eine der Leiterschleifen liege in der xy -Ebene bei $z = 0$, die andere bei $z = h$ (Mittelpunkte bei $x = y = 0$).

Die Gegeninduktion ist gegeben durch die Induktivitätskoeffizienten

$$M_{12} = M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S_1} \oint_{S_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

Weiter können wir M_{12} exakt berechnen:

$$M_{12} = 4 \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-a/2}^{a/2} dx_1 \int_{-a/2}^{a/2} dx_2 \left\{ \frac{-1}{[a^2 + h^2 + (x_2 - x_1)^2]^{1/2}} + \frac{1}{[h^2 + (x_2 - x_1)^2]^{1/2}} \right\}.$$

Mit

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} &= \operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}), \\ \int dx \ln(x + \sqrt{c+x^2}) &= x \ln(x + \sqrt{c+x^2}) - \sqrt{c+x^2}, \end{aligned}$$

erhalten wir weiter

$$M_{12} = \frac{\mu_0}{\pi} \left\{ 2h - 4\sqrt{a^2 + h^2} + 2\sqrt{2a^2 + h^2} + \frac{a}{2} \ln \frac{(a^2 + h^2)(\sqrt{2a^2 + h^2} - a)(\sqrt{a^2 + h^2} + a)^3}{h^2(\sqrt{a^2 + h^2} - a)(\sqrt{2a^2 + h^2} + a)^3} \right\}.$$

Für $h \gg a$ erhalten wir

$$M_{12} \simeq \frac{\mu_0 a^4}{2\pi h^3}. \quad (1)$$

- (d) Berechnen Sie daraus weiterhin die Kraft, die notwendig ist, um die beiden Leiterschleifen mit den Strömen I_1 und I_2 entlang der z -Achse voneinander zu entfernen.

Wir betrachten die im Magnetfeld gespeicherte Energie

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} M_{ij} I_i I_j.$$

Die Kraft ist dann definiert als

$$\vec{F}_{12} = \frac{\partial W_{\text{magn}}}{\partial h} \vec{e}_z.$$

Deswegen

$$F_{12} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial h} [M_{12}(h) I_1 I_2 + M_{21}(h) I_1 I_2] = \frac{\partial M_{12}(h)}{\partial h} I_1 I_2.$$

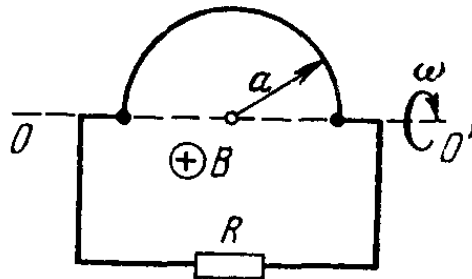
Benutzen wir jetzt das Ergebnis (1):

$$\vec{F}_{12} \simeq -\frac{3\mu_0 a^4}{2\pi h^4} I_1 I_2 \vec{e}_z.$$

3. Elektromagnetische Energie:

(10 Punkte)

Ein dünner Leiter bildet einen Halbkreis (Radius a) und dreht sich um die Achse OO' . Ein homogenes, konstantes externes Magnetfeld ist senkrecht zur Rotationsachse gerichtet. Der Gesamtwiderstand des Kreises ist R .



Vernachlässigen Sie das Magnetfeld des Induktionsstroms und finden Sie die Wärmeleistung die während einer Rotationsperiode generiert wurde.

Der magnetische Fluss ist

$$\Phi(t) = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \frac{\pi a^2}{2} \cos \omega t.$$

Jetzt finden wir die EMK mithilfe von dem Faraday'schen Gesetz:

$$\xi = -\frac{d\Phi}{dt} = B\omega \frac{\pi a^2}{2} \sin \omega t.$$

Der induzierte Strom

$$I = \frac{\xi}{R} = \frac{\pi a^2 \omega B}{2R} \sin \omega t.$$

Die induzierte Leistung

$$P(t) = \xi I = \frac{\pi^2 a^4 \omega^2 B^2}{4R} \sin^2 \omega t.$$

Die durchschnittliche Wärmeleistung

$$\langle P \rangle = \frac{\pi^2 a^4 \omega^2 B^2}{4R} \frac{1}{T} \int_0^T dt \sin^2 \omega t = \frac{\pi^2 a^4 \omega^2 B^2}{8R}.$$