Klassische Theoretische Physik III WS 2014/2015

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. B. Narozhny

Blatt 9
Abgabe 19.12.2014, Besprechung 07.01.2015

---

1. Coulomb-Eichung: (10 Punkte)

In Coulomb-Eichung gilt

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Stromdichte $\vec{j}$ als Summe eines "parallelen" Anteils $\vec{j}_\parallel$ und eines "senkrechten" Anteils $\vec{j}_\perp$ geschrieben werden kann, wobei die zwei Anteile die folgenen Form haben:

$$\vec{j}_\parallel \propto \vec{\nabla}_{\vec{r}} \int d^3r' \frac{\vec{\nabla}_{\vec{r}\,'} \cdot \vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|},$$

$$\vec{j}_\perp \propto \vec{\nabla}_{\vec{r}} \times \vec{\nabla}_{\vec{r}} \times \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}.$$

Finden Sie die Koeffizienten in die SI und die Gausschen Einheitssystemen.

(b) Berechnen Sie die fouriertransformierte parallele und senkrechte Stromdichte $\vec{j}_\parallel(\vec{k})$ und $\vec{j}_\perp(\vec{k})$. Die Fouriertransformation ist dabei definiert als

$$\vec{j}(\vec{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \vec{j}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}.$$

Warum werden $\vec{j}_\parallel$ und $\vec{j}_\perp$ parallele bzw. senkrechte Stromdichte genannt?

(c) Finden Sie

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_\parallel, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{j}_\parallel, \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_\perp, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{j}_\perp.$$

(d) Beweisen Sie die folgende Identitäten (in Gaussschen Einheitssystem):

$$\frac{1}{c} \vec{\nabla} \frac{\partial}{\partial t} \varphi = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_\parallel, \qquad \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}_\perp.$$

Wie sehen sich diese Identitäten in SI-System aus?

2. Drehimpuls einer langen Spule: (10 Punkte)

Stellen Sie sich eine sehr lange Spule mit Radius R vor, die n Windungen pro Längeneinheit besitzt und den Strom I führt. Koaxial zur Spule liegen zwei lange zylinderförmige Schalen der Länge L - die eine, mit Radius a innerhalb der Spule gelegen, trägt diegleichförmig auf die Oberfläche verteilte Ladung Q, die andere, mit Radius $b \ll L$ außerhalb der Spule gelegen, trägt die Ladung $-Q$. Wird der Strom in der Spule allmählich zu Null reduziert, beginnen die Zylinder zu rotieren.

Berechnen Sie den Drehimpuls, der am Anfang in den Felder gespeichert war, und vergleichen ihn mit dem mechanischen Drehimpuls der rotierenden Zylindern.

Hinweis Wir nehmen an, dass die Spule das elektrischen Feld nicht abschirmt.

3. Poynting-Vektor: (10 Punkte)

Eine sehr lange Spule mit Radius a und n Windungen pro Längeneinheit trägt einen Strom I. Koaxial mit der Spule befindet sich bei $b \gg a$ ein kreisförmiger Drahtring mit Widertand R. Verringert man den Strom in der Spule (allmählich), dann wird ein Strom J im Ring induziert.

(a) Bestimmen Sie J in Abhängigkeit von dI/dt.

(b) Die auf den Ring übertragene Leistung muss aus der Spule stammen. Bestätigen Sie dies, indem Sie den Poynting-Vektor direct außerhalb der Spule berechnen. Integrieren Sie über die gesamte Fläche der Spule und überprüfen Sie, dass Sie die richtige Gesamtleistung erhalten.

Hinweis Das elektrische Feld außerhalb der Spule beruht auf dem veränderlichen Fluss in der Spule; das magnetische Feld beruht auf dem Strom im Ring.