

Klassische Theoretische Physik III WS 2014/2015

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. B. NarozhnyBlatt 9
Lösungen

1. Coulomb-Eichung:

(3+2+2+3=10 Punkte)

In Coulomb-Eichung gilt

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0.$$

- (a) Zeigen Sie, dass die Stromdichte $\vec{j}$ als Summe eines “parallelen” Anteils $\vec{j}_{\parallel}$ und eines “senkrechten” Anteils $\vec{j}_{\perp}$ geschrieben werden kann, wobei die zwei Anteile die folgenden Form haben:

$$\begin{aligned}\vec{j}_{\parallel} &\propto \vec{\nabla}_{\vec{r}} \int d^3r' \frac{\vec{\nabla}_{\vec{r}'} \cdot \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \\ \vec{j}_{\perp} &\propto \vec{\nabla}_{\vec{r}} \times \vec{\nabla}_{\vec{r}} \times \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.\end{aligned}$$

Es gibt ein mathematische Theorem (das Helmholtz-Theorem), das besagt, dass es möglich ist, jedes Vektorfeld $\vec{a}$, das im Unendlichen abklingt $\vec{a}(\vec{r} \rightarrow \infty) \rightarrow 0$, als Superposition eines rotationsfreien (wirbelfreien) Feldes und eines divergenzfreien (quellenfreien) Feldes darzustellen.

Der Beweis:

$$\vec{a}(\vec{r}) = \int d^3r' \vec{a}(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \int d^3r' \vec{a}(\vec{r}') \vec{\nabla}_{\vec{r}}^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Benutzen wir die Identität

$$\vec{\nabla}^2 \vec{x} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{x}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{x}).$$

Wir finden

$$\begin{aligned}\vec{a}(\vec{r}) &= -\frac{1}{4\pi} \left[\vec{\nabla}_{\vec{r}} \left(\vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \int d^3r' \frac{\vec{a}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) - \vec{\nabla}_{\vec{r}} \times \left(\vec{\nabla}_{\vec{r}} \times \int d^3r' \frac{\vec{a}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{4\pi} \left[\vec{\nabla}_{\vec{r}} \int d^3r' \vec{a}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \vec{\nabla}_{\vec{r}} \times \int d^3r' \vec{a}(\vec{r}') \times \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[\vec{\nabla}_{\vec{r}} \int d^3r' \vec{a}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \vec{\nabla}_{\vec{r}} \times \int d^3r' \vec{a}(\vec{r}') \times \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right].\end{aligned}$$

Jetzt benutzen wir die Identitäten

$$\vec{x} \cdot \vec{\nabla} \psi = -\psi \vec{\nabla} \cdot \vec{x} + \vec{\nabla} \cdot (\psi \vec{x}), \quad \vec{x} \times \vec{\nabla} \psi = \psi \vec{\nabla} \times \vec{x} - \vec{\nabla} \times (\psi \vec{x}).$$

Wir finden

$$\vec{a}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \left[-\vec{\nabla}_{\vec{r}} \int d^3r' \left(\frac{\vec{\nabla}_{\vec{r}'} \cdot \vec{a}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \cdot \frac{\vec{a}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) + \vec{\nabla}_{\vec{r}} \times \int d^3r' \left(\frac{\vec{\nabla}_{\vec{r}'} \times \vec{a}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \times \frac{\vec{a}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right].$$

Benutzen wir jetzt den gaußschen integralsatz und die Tatsache, dass unseres Vektorfeld im Unendlichen verschwindet. Wir finden letztendlich

$$\vec{a}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \left[-\vec{\nabla}_{\vec{r}} \int d^3r' \frac{\vec{\nabla}_{\vec{r}'} \cdot \vec{a}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \vec{\nabla}_{\vec{r}} \times \int d^3r' \frac{\vec{\nabla}_{\vec{r}'} \times \vec{a}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right].$$

Es ist also möglich das Vektorfeld $\vec{j}$ durch Superposition zweier unterschiedlicher Potentiale auszudrücken

$$\vec{j} = \vec{j}_{\parallel} + \vec{j}_{\perp}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{j}_{\parallel} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{\perp} = 0.$$

$$\vec{j}_{\parallel} = -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla}_{\vec{r}} \int d^3r' \frac{\vec{\nabla}_{\vec{r}'} \cdot \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|},$$

$$\vec{j}_{\perp} = \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla}_{\vec{r}} \times \vec{\nabla}_{\vec{r}} \times \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla}_{\vec{r}} \times \int d^3r' \frac{\vec{\nabla}_{\vec{r}'} \times \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Finden Sie die Koeffizienten in die SI und die Gausschen Einheitssystemen.

Das Helmholtz-Theorem hat mit der Einheitssystemen gar nichts zu tun. Deswegen sind die Koeffizienten in die SI und die Gausschen Einheitssystemen gleich.

- (b) *Berechnen Sie die fouriertransformierte parallele und senkrechte Stromdichte $\vec{j}_{\parallel}(\vec{k})$ und $\vec{j}_{\perp}(\vec{k})$. Die Fouriertransformation ist dabei definiert als*

$$\vec{j}(\vec{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \vec{j}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}.$$

Die Umkehrtransformation lautet

$$\vec{j}(\vec{k}) = \int d^3r \vec{j}(\vec{r}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}.$$

Es gilt die Orthogonalitätsbeziehung

$$\int d^3r e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} = (2\pi)^3 \delta(\vec{k}),$$

und

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = \delta(\vec{r}).$$

Wir betrachten zunächst die parallele Stromdichte:

$$\begin{aligned}\vec{j}_{\parallel}(\vec{r}) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \vec{j}_{\parallel}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \int d^3r' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \vec{j}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \int d^3r' \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{i\vec{k} \cdot \vec{j}(\vec{k})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}'}\end{aligned}$$

und translatieren $\vec{r}'$ um $\vec{r}$. Da wir nur translatieren, verändert sich das Integrationsmaß nicht und da wir über den ganzen Raum integrieren, ändern sich die Integrationsgrenzen nicht:

$$\begin{aligned}\vec{j}_{\parallel}(\vec{r}) &\stackrel{\vec{r}_1 \equiv \vec{r}' - \vec{r}}{=} -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \int d^3r_1 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{i\vec{k} \cdot \vec{j}(\vec{k})}{|\vec{r}_1|} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_1} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(-\frac{1}{4\pi} \int d^3r_1 (i\vec{k}) \frac{i\vec{k} \cdot \vec{j}(\vec{k})}{|\vec{r}_1|} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_1} \right) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}.\end{aligned}$$

Es folgt,

$$\vec{j}_{\parallel}(\vec{k}) = -\frac{i\vec{k}}{4\pi} \int d^3r_1 \frac{i\vec{k} \cdot \vec{j}(\vec{k})}{|\vec{r}_1|} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_1} = \frac{1}{4\pi} \vec{k} \left(\vec{k} \cdot \vec{j}(\vec{k}) \right) \int d^3r_1 \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_1}}{|\vec{r}_1|}.$$

Kümmern wir uns nun um die Fouriertransformation von $1/|\vec{r}|$:

$$\begin{aligned}\int d^3r \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}}{|\vec{r}|} &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \int_0^{\infty} dr r e^{ikr \cos \theta} = 2\pi \int_{-1}^1 dt \int_0^{\infty} dr r e^{ikrt} \\ &= -2\pi i \int_0^{\infty} dr \frac{1}{k} (e^{ikr} - e^{-ikr}) = 4\pi \int_0^{\infty} dr \frac{\sin kr}{k}.\end{aligned}$$

Hierbei wurde die z -Achse in $\vec{k}$ -Richtung gelegt und zu Kugelkoordinaten gewechselt. Wir führen den konvergenzerzeugenden Faktor $\epsilon > 0$ ein (am Ende schicken wir $\epsilon \rightarrow 0$) und erhalten

$$\begin{aligned}\int d^3r \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}}{r} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{4\pi}{k} \int_0^{\infty} dr e^{-\epsilon r} \sin kr = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{4\pi}{k} \text{Im} \int_0^{\infty} dr e^{(ik-\epsilon)r} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{4\pi}{k} \text{Im} \left[\frac{e^{(ik-\epsilon)r}}{ik-\epsilon} \right]_0^{\infty} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{4\pi}{k(k^2 + \epsilon^2)} \text{Im} [(ik + \epsilon)(\cos kr + i \sin kr) e^{-\epsilon r}]_0^{\infty} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{4\pi}{k(k^2 + \epsilon^2)} \text{Im} (ik + \epsilon) = \frac{4\pi}{k^2}.\end{aligned}$$

Somit ergibt sich

$$\vec{j}_{\parallel}(\vec{k}) = \frac{1}{4\pi} \vec{k} \left(\vec{k} \cdot \vec{j}(\vec{k}) \right) \frac{4\pi}{k^2} = \frac{\vec{k} \left(\vec{k} \cdot \vec{j}(\vec{k}) \right)}{k^2}.$$

Da die Fouriertransformation linear ist, erhalten wir die Komponente $j_{\perp}^{\alpha}(\vec{k})$ einfach aus

$$j_{\perp}^{\alpha}(\vec{k}) = j^{\alpha}(\vec{k}) - j_{\parallel}^{\alpha}(\vec{k}) = j^{\alpha}(\vec{k}) - \frac{k^{\alpha} k^{\beta} j^{\beta}(\vec{k})}{k^2} = \left(\delta^{\alpha\beta} - \frac{k^{\alpha} k^{\beta}}{k^2} \right) j^{\beta}(\vec{k}).$$

Warum werden $\vec{j}_{\parallel}$ und $\vec{j}_{\perp}$ parallele bzw. senkrechte Stromdichte genannt?

Aus unsere Ergebnisse wird ersichtlich, dass $\vec{j}_{\parallel}(\vec{k})$ in $\vec{k}$ -Richtung zeigt. Insgesamt gilt also

$$\vec{j}_{\parallel}(\vec{k}) \parallel \vec{k}, \quad \vec{j}_{\perp}(\vec{k}) \perp \vec{k}.$$

Die Bezeichnungen senkrechter (transversaler) Anteil für $\vec{j}_{\perp}$ und paralleler (longitudinaler) Anteil für $\vec{j}_{\parallel}$ beziehen sich also auf die Richtung von $\vec{k}$.

(c) Finden Sie

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{\parallel}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{j}_{\parallel}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{\perp}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{j}_{\perp}.$$

Wir betrachten zunächst die Divergenz einer Rotation und die Rotation eines Gradienten:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) = \partial_{x_i} \varepsilon_{ijk} \partial_{x_j} a_k = 0,$$

$$\left[\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \cdot \vec{b}) \right]_k = \varepsilon_{ijk} \partial_{x_i} \partial_{x_j} b = 0.$$

Beide Ausdrücke verschwinden, da die Kontraktion des antisymmetrischen Tensors ε_{ijk} mit den symmetrischen Tensoren $\partial_i \partial_j a_k$, bzw. $\partial_i \partial_j b$ verschwindet. Hierbei nehmen wir an, dass a_k und b zweimal stetig differenzierbar sind. Es folgt

$$\vec{\nabla} \times \vec{j}_{\parallel} = \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{\perp} = 0.$$

Betrachten wir nun

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{\parallel} = -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla}^2 \int d^3 r' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Benutzen wir jetzt die Identität

$$\vec{\nabla}^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}'),$$

und finden

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{\parallel} = \int d^3 r' \vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') = \vec{\nabla} \cdot \vec{j}.$$

Betrachten wir nun die verbleibende Rotation

$$\vec{\nabla} \times \vec{j}_{\perp} = \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \int d^3 r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Mit der Identität

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{a}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla^2 \vec{a},$$

erhalten wir

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{a} = \vec{\nabla} \times \left[\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - \vec{\nabla}^2 \vec{a} \right] = -\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}^2 \vec{a}).$$

Letztendlich

$$\vec{\nabla} \times \vec{j}_\perp = \vec{\nabla} \times \vec{j}.$$

Alternativ hätte man auch einfach die Rotation und Divergenz des Stromes betrachten können:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{j} &= \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{j}_\parallel}_0 + \vec{\nabla} \times \vec{j}_\perp = \vec{\nabla} \times \vec{j}_\perp, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{j} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_\parallel + \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_\perp}_0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_\parallel. \end{aligned}$$

(d) *Beweisen Sie die folgende Identitäten (in Gaußschen Einheitssystem):*

$$\frac{1}{c} \vec{\nabla} \frac{\partial}{\partial t} \varphi = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_\parallel, \quad \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}_\perp.$$

Wir betrachten die beiden inhomogenen Maxwell Gleichungen im Vakuum

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Wenn wir die Felder durch die elektromagnetischen Potentiale

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A},$$

ausdrücken, erhalten wir

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\Delta\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 4\pi\rho,$$

und

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c} \vec{\nabla} \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Durch die Coulomb-Eichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ vereinfachen sich die Gleichungen zu

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho, \quad \square \vec{A} = \frac{1}{c} \vec{\nabla} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} \vec{j},$$

mit $\square = \Delta - (1/c^2) \partial^2 / \partial t^2$.

Die erste Gleichung erkennen wir als Poisson-Gleichung mit der Lösung

$$\varphi(\vec{r}, t) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Mit der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0,$$

erhalten wir

$$\frac{1}{c} \vec{\nabla} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{1}{c} \vec{\nabla} \int d^3 r' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\parallel},$$

und auch

$$\square \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\parallel} - \frac{4\pi}{c} (\vec{j}_{\parallel} + \vec{j}_{\perp}) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\perp}.$$

Wie sehen sich diese Identitäten in SI-System aus?

$$\vec{\nabla} \frac{\partial}{\partial t} \varphi = \frac{1}{\epsilon_0} \vec{j}_{\parallel}, \quad \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}_{\perp}.$$

2. Drehimpuls einer langen Spule:

(10 Punkte)

Stellen Sie sich eine sehr lange Spule mit Radius R vor, die n Windungen pro Längeneinheit besitzt und den Strom I führt. Koaxial zur Spule liegen zwei lange zylinderförmige Schalen der Länge L - die eine, mit Radius a innerhalb der Spule gelegen, trägt die gleichförmig auf die Oberfläche verteilte Ladung Q , die andere, mit Radius $b \ll L$ außerhalb der Spule gelegen, trägt die Ladung $-Q$. Wird der Strom in der Spule allmählich zu Null reduziert, beginnen die Zylinder zu rotieren.

Berechnen Sie den Drehimpuls, der am Anfang in den Felder gespeichert war, und vergleichen ihn mit dem mechanischen Drehimpuls der rotierenden Zylindern.

Wir benutzen die zylindrischen Koordinaten (ρ, φ, z) .

Das elektrische Feld in zwischen der Schalen:

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \frac{\vec{e}_{\rho}}{\rho}, \quad a < \rho < b.$$

Mit dem Strom:

Das magnetische Feld innerhalb der Spule:

$$\vec{B} = \mu_0 n I \vec{e}_z, \quad \rho < R.$$

Die Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes

$$\vec{\mathcal{P}} = \epsilon_0 \mu_0 \vec{S} = -\frac{\mu_0 n I Q}{2\pi l \rho} \vec{e}_{\varphi}, \quad a < \rho < R.$$

Deswegen, finden wir die Drehimpulsdichte des Feldes als

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{\mathcal{P}} = -\frac{\mu_0 n I Q}{2\pi l} \vec{e}_z.$$

Die Dichte ist konstant. Der Drehimpuls ist denn

$$\vec{L} = \vec{r}V, \quad V = \pi(R^2 - a^2)l, \quad \vec{L} = -\frac{1}{2}\mu_0 n I Q (R^2 - a^2) \vec{e}_z.$$

Als man den Strom reduziert:

Finden wir erst das induzierten elektrischen Feld (nach dem Faraday Gesetz)

$$\vec{E} = -\frac{1}{2}\mu_0 n \frac{dI}{dt} \vec{e}_\varphi \begin{cases} R^2/\rho, & \rho > R, \\ \rho, & \rho < R. \end{cases}$$

Das Drehmoment auf die Außenschale ist

$$\vec{N}_b = -Q\vec{r} \times \vec{E} = \frac{1}{2}\mu_0 n Q R^2 \frac{dI}{dt} \vec{e}_z.$$

Die Außenschale "picks up" den Drehimpuls

$$\vec{L}_b = \frac{1}{2}\mu_0 n Q R^2 \vec{e}_z \int_I^0 dt \frac{dI}{dt} = -\frac{1}{2}\mu_0 n I Q R^2 \vec{e}_z.$$

Ähnlicherweise für die Innenschale

$$\begin{aligned} \vec{N}_a &= -\frac{1}{2}\mu_0 n Q a^2 \frac{dI}{dt} \vec{e}_z, \\ \vec{L}_a &= \frac{1}{2}\mu_0 n I Q a^2 \vec{e}_z. \end{aligned}$$

Die Schalen rotieren gegenläufig!

Das Gesamtdrehimpuls ist erhalten

$$\vec{L} = \vec{L}_a + \vec{L}_b.$$

3. Poynting-Vektor:

(5+5=10 Punkte)

Eine sehr lange Spule mit Radius a und n Windungen pro Längeneinheit trägt einen Strom I . Koaxial mit der Spule befindet sich bei $b \gg a$ ein kreisförmiger Draht ring mit Widerstand R . Verringert man den Strom in der Spule (allmählich), dann wird ein Strom J im Ring induziert.

(a) *Bestimmen Sie J in Abhängigkeit von dI/dt .*

$$\xi = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad \Phi = \pi a^2 B, \quad B = \mu_0 n I.$$

$$J = \frac{\xi}{R} = -\frac{1}{R}\mu_0 \pi a^2 n \frac{dI}{dt}.$$

- (b) Die auf den Ring übertragene Leistung muss aus der Spule stammen. Bestätigen Sie dies, indem Sie den Poynting-Vektor direkt außerhalb der Spule berechnen. Integrieren Sie über die gesamte Fläche der Spule und überprüfen Sie, dass Sie die richtige Gesamtleistung erhalten.

Das induzierte elektrische Feld finden wir vom Faraday Gesetz:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

$$E(2\pi a) = -\mu_0 \pi a^2 n \frac{dI}{dt} \Rightarrow \vec{E} = -\frac{1}{2} \mu_0 a n \frac{dI}{dt} \vec{e}_\varphi.$$

Das Magnetfeld des Drahtlings ist

$$\vec{B} = \frac{1}{2} \mu_0 J \frac{b^2}{(b^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z.$$

Das findet man ähnlich zu Blatt 7, Aufgabe (a1):

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 J}{4\pi} \int \frac{d\vec{l}' \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 J}{4\pi} \int \frac{\cos \theta dl'}{r^2} \vec{e}_z = \frac{\mu_0 J \cos \theta}{4\pi r^2} 2\pi b \vec{e}_z = \frac{\mu_0 J b^2}{2(b^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z.$$

Der Poynting-Vektor ist

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \left[-\frac{1}{2} \mu_0 a n \frac{dI}{dt} \right] \left[\frac{1}{2} \mu_0 J \frac{b^2}{(b^2 + z^2)^{3/2}} \right] \vec{e}_\varphi \times \vec{e}_z = -\frac{\mu_0 n J a b^2}{4(b^2 + z^2)^{3/2}} \frac{dI}{dt} \vec{e}_\rho.$$

Die Leistung ist

$$\begin{aligned} P &= \int \vec{S} \cdot d\vec{A} = \int_{-\infty}^{\infty} dz S 2\pi a = -\frac{\pi}{2} \mu_0 n J \frac{dI}{dt} a^2 b^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(b^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= - \left[\pi \mu_0 n a^2 \frac{dI}{dt} \right] J \\ &= J^2 R. \end{aligned}$$