

**Klassische Theoretische Physik III    WS 2014/2015****Prof. Dr. A. Shnirman**  
**Dr. B. Narozhny****Blatt 10**  
**Lösungen**

---

**1. Polarisation:** (2+2+3+3=10 Punkte)*Betrachten wir zwei monochromatische Wellen mit den Amplituden*

$$\vec{A}_{01} = (0, A_1, 0), \quad \vec{A}_{02} = (0, 0, A_2 e^{i\delta}),$$

*wobei  $A_1, A_2$  reell sind und  $\delta$  die Phasendifferenz ist.*

Für die elektromagnetischen Wellen wählen wir die folgende Eichung:

$$\varphi = 0, \quad \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Das elektrische Feld erster Welle ist

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{c} \operatorname{Re} \{ i\omega A_1 e^{i(k_x x - \omega t)} \} \vec{e}_y = -\frac{\omega}{c} A_1 \vec{e}_y \sin(k_x x - \omega t).$$

Für die zweite Welle erhalten wir

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{c} \operatorname{Re} \{ i\omega A_2 e^{i(k_x x - \omega t + \delta)} \} \vec{e}_z = -\frac{\omega}{c} A_2 \vec{e}_z \sin(k_x x - \omega t + \delta).$$

*Finden Sie das gesamte, physikalische (d.h. reelle) elektrische Feld  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$  wenn**(a) die Phasendifferenz ist gegeben durch  $\delta = 0$  oder  $\delta = \pi$  (lineare Polarisation);*Wenn  $\delta = 0$ , dann

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = -\frac{\omega}{c} \sin(k_x x - \omega t) [A_1 \vec{e}_y + A_2 \vec{e}_z].$$

Wenn  $\delta = \pi$ , dann

$$\vec{E} = -\frac{\omega}{c} \sin(k_x x - \omega t) [A_1 \vec{e}_y - A_2 \vec{e}_z].$$

In beide Fälle ist die Richtung der Schwingung des elektrischen Feldes konstant.

- (b) *die Phasendifferenz ist  $\delta = \pi/2$  und  $A_1 = A_2$  (zirkulare Polarisation).*

Wenn  $\delta = \pi/2$  und  $A_1 = A_2$ , bezeichne  $E_0 = \omega A_1/c$ , und

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -E_0 [\sin(k_x x - \omega t) \vec{e}_y + \cos(k_x x - \omega t) \vec{e}_z] \\ &= E_0 [\sin(k_x x - \omega t + \pi) \vec{e}_y + \cos(k_x x - \omega t + \pi) \vec{e}_z].\end{aligned}$$

Der Betrag  $|\vec{E}|$  ist konstant, aber die Richtung der Schwingung des elektrischen Feldes ändert sich innerhalb der senkrecht zum Wellenvektor stehenden Ebene mit konstanter Winkelgeschwindigkeit. Damit beschreibt der Vektor  $\vec{E}$  einen Kreis.

- (c) *Zeigen Sie, dass die Superposition der zwei zirkular polarisierten Wellen*

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= E_0 [\cos(kx - \omega t + \phi_0) \vec{e}_z + \sin(kx - \omega t + \phi_0) \vec{e}_y], \\ \vec{E}_2 &= E_0 [\cos(kx - \omega t) \vec{e}_z - \sin(kx - \omega t) \vec{e}_y],\end{aligned}$$

*linear polarisiert ist.*

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2.$$

Betrachten wir erst die  $z$ -Komponente:

$$E_0 \cos(kx - \omega t + \phi_0) \vec{e}_z + E_0 \cos(kx - \omega t) \vec{e}_z = 2E_0 \cos \frac{\phi_0}{2} \cos \left( kx - \omega t + \frac{\phi_0}{2} \right) \vec{e}_z.$$

Die  $y$ -Komponente ist

$$E_0 \sin(kx - \omega t + \phi_0) \vec{e}_y - E_0 \sin(kx - \omega t) \vec{e}_y = 2E_0 \sin \frac{\phi_0}{2} \cos \left( kx - \omega t + \frac{\phi_0}{2} \right) \vec{e}_y.$$

Deswegen finden wir für das Gesamtfeld

$$\vec{E} = 2E_0 \left[ \cos \frac{\phi_0}{2} \vec{e}_z + \sin \frac{\phi_0}{2} \vec{e}_y \right] \cos \left( kx - \omega t + \frac{\phi_0}{2} \right).$$

Die Richtung der Schwingung des elektrischen Feldes ist konstant und ist gegeben durch

$$\vec{n} = \cos \frac{\phi_0}{2} \vec{e}_z + \sin \frac{\phi_0}{2} \vec{e}_y.$$

- (d) *Betrachten Sie die Superposition einer zirkular polarisierten Welle und einer linear polarisierten Welle. Welche Gebilde beschreibt das elektrische Feld?*

Betrachten wir die Superposition einer linear polarisierten Welle

$$\vec{E}_1 = E_{01} \vec{e}_y \sin(kx - \omega t),$$

und einer zirkular polarisierten Welle

$$\vec{E}_2 = E_{02} [\sin(kx - \omega t) \vec{e}_y + \cos(kx - \omega t) \vec{e}_z].$$

Für die  $y$ -Komponente erhalten wir

$$E_{01} \sin(kx - \omega t) + E_{02} \sin(kx - \omega t) = [E_{01} + E_{02}] \sin(kx - \omega t).$$

Deswegen ist das Gesamtfeld

$$\vec{E} = E_y \vec{e}_y \sin(kx - \omega t) + E_z \vec{e}_z \cos(kx - \omega t),$$

wobei

$$E_y = E_{01} + E_{02}, \quad E_z = E_{02}.$$

Der Vektor  $\vec{E}$  beschreibt eine Ellipse.

## 2. Kugelwelle:

(4+1=5 Punkte)

Das elektrische Feld einer Kugelwelle sei gegeben durch:

$$\vec{E}(r, \vartheta, \varphi, t) = A \frac{\sin \vartheta}{r} \left[ \cos(kr - \omega t) - \frac{1}{kr} \sin(kr - \omega t) \right] \hat{e}_\varphi, \quad \text{mit } \frac{\omega}{k} = c.$$

(a) Finden Sie  $\vec{B}(r, \vartheta, \varphi, t)$ , so dass die Maxwell-Gleichungen im Vakuum erfüllt sind.

Aus Maxwell-Gleichungen folgt:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -c \vec{\nabla} \times \vec{E}.$$

Die Rotation des in Kugelkoordinaten gegebenen Vektorfeld  $\vec{E}$  ist durch

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[ \frac{\partial}{\partial \vartheta} (E_\varphi \sin \vartheta) - \frac{\partial E_\vartheta}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) \right] \vec{e}_\vartheta \\ &\quad + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r E_\vartheta) - \frac{\partial E_r}{\partial \vartheta} \right] \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

gegeben. Mit  $\vec{E} \propto \vec{e}_\varphi$  (d.h. mit  $E_r = E_\vartheta = 0$ ) erhalten wir

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[ \frac{\partial}{\partial \vartheta} (E_\varphi \sin \vartheta) \right] \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left[ -\frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) \right] \vec{e}_\vartheta.$$

Für das elektrische Feld in dieser Aufgabe finden wir

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \frac{2A \cos \vartheta}{r^2} \left[ \cos(kr - \omega t) - \frac{1}{kr} \sin(kr - \omega t) \right] \vec{e}_r \\ &\quad - \frac{A \sin \vartheta}{r} \left[ -k \sin(kr - \omega t) + \frac{1}{kr^2} \sin(kr - \omega t) - \frac{1}{r} \cos(kr - \omega t) \right] \vec{e}_\vartheta. \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\vec{B}(r, \vartheta, \varphi, t) = \vec{B}^w(r, \vartheta, \varphi, t) + \vec{B}_0(r, \vartheta, \varphi),$$

wobei  $B_0$  unabhängig von  $t$  ist und

$$\begin{aligned}\vec{B}^w(r, \vartheta, \varphi, t) = & \frac{2cA \cos \vartheta}{\omega r^2} \left[ \sin(kr - \omega t) + \frac{1}{kr} \cos(kr - \omega t) \right] \vec{e}_r \\ & - \frac{cA \sin \vartheta}{\omega r} \left[ k \cos(kr - \omega t) - \frac{1}{kr^2} \cos(kr - \omega t) - \frac{1}{r} \sin(kr - \omega t) \right] \vec{e}_\vartheta.\end{aligned}$$

Nun benutzen wir

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}.$$

Wir können jetzt explizit betätigen, dass

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}^w = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Es folgt

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}_0 = \frac{4\pi}{c} \vec{j}.$$

Für  $j = 0$  setzen wir  $\vec{B}_0 = 0$ .

Deswegen bekommen wir das Ergebniss:

$$\begin{aligned}\vec{B}(r, \vartheta, \varphi, t) = & \frac{A}{kr^2} \left\{ 2 \cos \vartheta \left[ \sin(kr - \omega t) + \frac{1}{kr} \cos(kr - \omega t) \right] \vec{e}_r \right. \\ & \left. - \sin \vartheta \left[ kr \cos(kr - \omega t) - \frac{1}{kr} \cos(kr - \omega t) - \sin(kr - \omega t) \right] \vec{e}_\vartheta \right\}.\end{aligned}$$

- (b) Berechnen Sie den Poynting-Vektor  $\vec{S}$  und daraus den Intensitätsvektor  $\vec{I} = \langle \vec{S} \rangle$ , indem Sie über eine Periode mitteln.

Der Poynting-Vektor is gegeben durch

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B}.$$

Mit der Hilfe der expliziten Ausdrücken für  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  erhalten wir

$$\begin{aligned}\vec{S} = & \frac{cA^2 \sin \vartheta}{4\pi kr^3} \left\{ \cos \vartheta \left[ \sin 2(kr - \omega t) \left( 1 - \frac{1}{k^2 r^2} \right) + \frac{2}{kr} \cos 2(kr - \omega t) \right] \vec{e}_\vartheta \right. \\ & \left. + kr \sin \vartheta \left[ \cos^2(kr - \omega t) - \frac{1}{2kr} \sin 2(kr - \omega t) \left( 2 - \frac{1}{k^2 r^2} \right) - \frac{1}{k^2 r^2} \cos 2(kr - \omega t) \right] \vec{e}_r \right\}.\end{aligned}$$

Der Intensitätsvektor  $\vec{I} = \langle \vec{S} \rangle$  ergibt sich:

$$\vec{I} = \frac{cA^2 \sin^2 \vartheta}{8\pi r^2} \vec{e}_r.$$

Hier haben wir die folgenden Identitäten benutzt:

$$\langle \sin 2(kr - \omega t) \rangle = 0, \quad \langle \sin^2(kr - \omega t) \rangle = \langle \cos^2(kr - \omega t) \rangle = 1/2.$$

### 3. Koaxiale Übertragungsleitungen:

(3+2+5+5=15 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass die Maxwell'schen Gleichungen in diesem Fall zur folgenden Relation führen:

$$k = \omega/c.$$

Maxwell'sche Gleichungen innerhalb des Koaxialkables:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0, & \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.\end{aligned}$$

Wellen-Ansatz:

$$\vec{E} = \vec{E}_0(x, y)e^{i(kz - \omega t)}, \quad \vec{B} = \vec{B}_0(x, y)e^{i(kz - \omega t)}, \quad E_{0z} = B_{0z} = 0.$$

Damit finden wir

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_{0y}}{\partial x} - \frac{\partial E_{0x}}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial B_{0y}}{\partial x} - \frac{\partial B_{0x}}{\partial y} &= 0, \\ -kE_{0y} &= \omega B_{0x}, & kB_{0x} &= -\frac{\omega}{c^2}E_{0y}, \\ kE_{0x} &= \omega B_{0y}, & kB_{0y} &= \frac{\omega}{c^2}E_{0x}.\end{aligned}$$

Von der letzten vier Gleichungen erhalten wir

$$k = \frac{\omega}{c}.$$

- (b) Finden Sie die Relation zwischen den Komponenten von  $\vec{E}_0$  und  $\vec{B}_0$ . Zeigen Sie, dass die Maxwell'schen Gleichungen äquivalent den Elektrostatik- und Magnetostatik-Gleichungen im leeren Raum für  $\vec{E}_0$  und  $\vec{B}_0$  sind.

Von der Maxwell'schen Gleichungen erhalten wir

$$E_{0x} = cB_{0y}, \quad E_{0y} = -cB_{0x} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} \perp \vec{B}.$$

Die Kontinuitätsgleichungen:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0.$$

Von der Kontinuitätsgleichungen und der Maxwell'schen Gleichungen erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_{0y}}{\partial x} - \frac{\partial E_{0x}}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial E_{0x}}{\partial x} + \frac{\partial E_{0y}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial B_{0y}}{\partial x} - \frac{\partial B_{0x}}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial B_{0x}}{\partial x} + \frac{\partial B_{0y}}{\partial y} &= 0.\end{aligned}$$

- (c) *Benutzen Sie die Maxwell'schen Gleichungen (sowie die Randbedingungen für ideale Leiter), um  $\vec{E}_0$  und  $\vec{B}_0$  zu finden.*

Die Lösung können wir von der Elektrostatik (sowie Magnetostatik) übernehmen. Das elektrische Feld einer unendlich ausgedehnten Linienladung ist (in Zylindrischen Koordinaten)

$$\vec{E}_0 = \frac{A}{r} \vec{e}_r.$$

Das magnetische Feld eines unendlichen geraden Stroms ist

$$\vec{B}_0 = \frac{A}{cr} \vec{e}_\varphi.$$

Wir können jetzt explizit bestätigen, dass die Maxwell'schen Gleichungen sowie die Randbedingungen für beliebigen Werten von  $A$  erfüllt sind.

- (d) *Bestimmen Sie die (zeitabhängige eindimensionale) Ladungsdichte  $\rho(z, t)$  sowie den Strom  $I(z, t)$  im inneren Leiter des Koaxialkabels.*

Benutzen wir das Gauß'schen Gesetz für einen Zylinder von Radius  $r$  und Länge  $dz$ :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0} Q.$$

Die linke Seite:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = E_0 \frac{\cos(kz - \omega t)}{r} (2\pi r) dz$$

Die rechte Seite:

$$Q = \lambda dz.$$

Deswegen

$$\lambda = 2\pi\epsilon_0 E_0 \cos(kz - \omega t).$$

Jetzt benutzen wir das Amper'schen Gesetz für ein Kreis von Radius  $r$ :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I.$$

Die linke Seite:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{E_0}{c} \frac{\cos(kz - \omega t)}{r} (2\pi r).$$

Deswegen

$$I = \frac{2\pi E_0}{\mu_0 c} \cos(kz - \omega t).$$