Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie
der Kondensierten Materie

Klassische Theoretische Physik III WS 2014/2015

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. B. Narozhny

Blatt 11
Abgabe 16.01.2015, Besprechung 21.01.2015

---

1. Magnetische Dipol- und elektrische Quadrupolstrahlung: (10 Punkte)

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass das Vektor-Potential des Strahlungsfeldes erzeugt von einer Stromverteilung $\vec{j}(\vec{r},t) = \vec{j}_0(\vec{r})e^{-i\omega t}$ in der Fernzone durch

$$\vec{A}(\vec{r},t) = A_0(\vec{r})e^{-i\omega t}, \qquad \vec{A}_0(\vec{r}) = \frac{e^{ikr}}{cr}\vec{g}(k\vec{n}) + \mathcal{O}(r^{-2}), \qquad \vec{g}(k\vec{n}) = \int d^3r'\vec{j}_0(\vec{r}\,')e^{-ik\vec{n}\vec{r}\,'},$$

gegeben ist. Dabei $\vec{n} \equiv \vec{r}/r$ und $k = \omega/c$. In der Vorlesung haben wir die elektrische Dipol-Strahlung betrachtet, wobei wir die Exponent $e^{-ik\vec{n}\vec{r}\,'}$ entwickelt haben und nur den ersten Term berücksichtigt haben

$$e^{-ik\vec{n}\vec{r}\,'} \approx 1 - ik\vec{n}\vec{r}\,' + \dots \qquad \Rightarrow \qquad \vec{g}(k\vec{n}) \approx \vec{g}^{\,(0)}(k\vec{n}) = \int d^3r'\vec{j}_0(\vec{r}\,').$$

Nun betrachten wir den nächsten Term und erhalten

$$\vec{g}(k\vec{n}) \approx \vec{g}^{\,(0)}(k\vec{n}) - ik\vec{g}^{\,(1)}(k\vec{n}); \qquad \vec{g}^{\,(1)} = \int d^3r'(\vec{n}\vec{r}\,')\vec{j}_0(\vec{r}\,').$$

(a) Zeigen Sie, dass die folgende Relation gilt

$$\vec{g}^{\,(1)} = -c\vec{n}\times\vec{m}_0 - \frac{i\omega}{6}\sum_{lp} n_l Q_{0,lp}\vec{e}_\rho - \frac{i\omega}{6}\vec{n}\int d^3r'(r')^2\rho_0(\vec{r}\,')\ ,$$

wobei $\vec{m}_0$ die Amplitude des oszillierenden magnetischen Momentes, $Q_{0,lp}$ die Amplitude des elektrischen Quadrupolmomentes, und ρ_0 die Amplitude der Ladungsdichte sind.

(b) Zeigen Sie, dass der dritte Term in $\vec{g}^{\,(1)}$ kein elektrisches oder magnetisches Feld erzeugt.

2. Dipolstrahlung: (10 Punkte)

(a) Zwei leitende Kugeln bilden einen elektrischen Dipol, der an einer idealen Stromquelle $I(t) = I_0e^{-i\omega t}$ gekoppelt ist (siehe Abb. 1).

1. Berechnen Sie die gesamte abgestrahlte Leistung für den Fall $d \ll \lambda$, wobei λ die Wellenlänge der Strahlung ist.

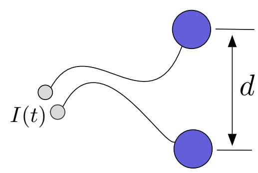

Abbildung 1: Strahlung: elektrischer Dipol

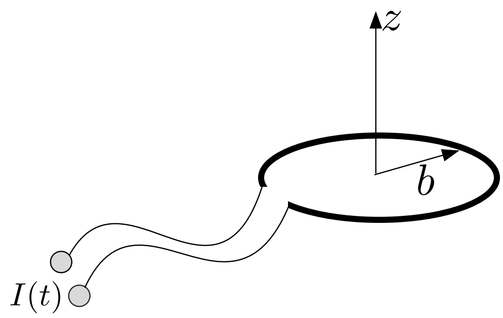

Abbildung 2: Strahlung: leitende Schleife

2. Zeigen Sie, dass der Strahlungswiderstand durch

$$R_s = 790 \frac{d^2}{\lambda^2} \, [\Omega]$$

gegeben ist. ($[\Omega]$ bezeichnet hier die SI-Einheit des Widerstands - Ohm).

3. Berechnen Sie den Strahlungswiderstand für die Wellenlänge der Neue Welle Karlsruhe.

(b) Eine leitende kreisförmige Schleife, die senkrecht zur z-Achse ausgerichtet ist, ist an einer idealen Stromquelle $I(t) = I_0 e^{-i\omega t}$ gekoppelt (siehe Abb. 2). Der Radius der Schleife, b, ist viel kleiner als die Wellenlänge, $b \ll \lambda$.

1. Berechnen Sie $\frac{dP}{d\Omega}[\theta, \varphi]$, d.h., die abgestrahlte Leistung pro Raumwinkel.
2. Bestimmen Sie den Strahlungswiderstand. Drücken Sie das Ergebnis durch λ und b aus und vergleichen Sie es mit dem Strahlungswiderstand eines elektrischen Dipols.

3. Quadrupolstrahlung: (10 Punkte)

(a) Betrachten Sie zwei entgegengesetzt orientierte schwingende elektrische Dipole in Abstand d, wie in Abb. 3 dargestellt, als Modell der elektrischen Quadrupolstrahlung.

Verwenden Sie die Ergebnisse aus der Vorlesung für das elektromagnetische Feld eines schwingenden Dipols, beachten Sie aber, dass die Dipole sich nicht im Ursprung befinden. Nehmen Sie an, dass $d \ll \lambda$. Betrachten Sie die Fernzone ($r \gg \lambda$)

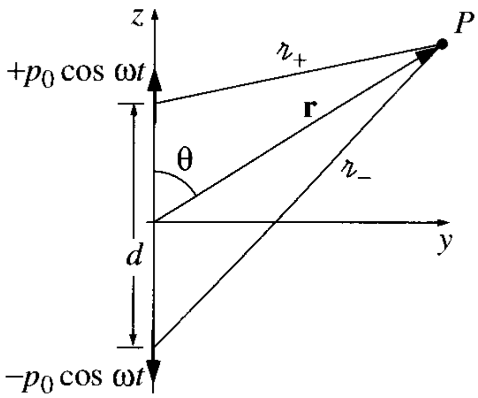

Abbildung 3: Quadrupolstrahlung

1. Bestimmen Sie das Skalar- und das Vektor-Potential in Lorenz-Eichung.
2. Bestimmen Sie das E und das B-Feld.
3. Bestimmen Sie den Poynting-Vektor sowie die abgestrahlte Leistung. Skizzieren Sie das Intensitätsprofil als Funktion von θ.

(b) Betrachten Sie jetzt zwei schwingende Punktladungen $q_1 = q_2 = Q_0$. Die zeitabhängige Position der Punktladung q_1 lautet $\vec{r}_1 = (0, 0, d/2 + a\cos(\omega t))$. Für q_2 gilt $\vec{r}_2 = (0, 0, -d/2 - a\cos(\omega t))$. Bestimmen Sie den Poynting-Vektor sowie die abgestrahlte Leistung, wenn $2a < d \ll \lambda$. *Hinweis: hier können Sie, z.B., die Ergebnisse der Aufgabe 1. verwenden.*

(c*) (10 Bonuspunkte)

Verallgemeinern Sie die Ergebnisse von 3a und 3b für den Fall wenn die Bedingung $d \ll \lambda$ nicht mehr gilt.