

Klassische Theoretische Physik III WS 2014/2015

Prof. Dr. A. Shnirman

Blatt 11

Dr. B. Narozhny

Abgabe 16.01.2015, Besprechung 21.01.2015

1. Magnetische Dipol- und elektrische Quadrupolstrahlung: (6+4=10 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die folgende Relation gilt

$$\vec{g}^{(1)} = -c\vec{n} \times \vec{m}_0 - \frac{i\omega}{6} n_j Q_{0,ij} \vec{e}_i - \frac{i\omega}{6} \vec{n} \int d^3 r' (r')^2 \rho_0(\vec{r}') ,$$

wobei $\vec{m}_0$ die Amplitude des oszillierenden magnetischen Momentes, $Q_{0,ij}$ die Amplitude des elektrischen Quadrupolmomentes, und ρ_0 die Amplitude der Ladungsdichte sind.

$$\vec{g}^{(1)}(k\vec{n}) = \int d^3 r' (\vec{n}\vec{r}') \vec{j}_0(\vec{r}')$$

Betrachten wir jetzt die Komponente i :

$$g_i^{(1)} = n_j \int d^3 r' r'_j j_{0,i} = n_j \int d^3 r' \left[\frac{r'_j j_{0,i} - r'_i j_{0,j}}{2} + \frac{r'_j j_{0,i} + r'_i j_{0,j}}{2} \right] = g_i^{(M)} + g_i^{(E)}$$

Der erste Term beschreibt den magnetischen Dipol

$$g_i^{(M)} = n_j \int d^3 r' \frac{r'_j j_{0,i} - r'_i j_{0,j}}{2} = -c [\vec{n} \times \vec{m}_0]_i, \quad \vec{m}_0 = \frac{1}{2c} \int d^3 r \vec{r} \times \vec{j}_0.$$

Den zweiten Term umschreiben wir als

$$g_i^{(E)} = n_j \int d^3 r' \frac{r'_j j_{0,i} + r'_i j_{0,j}}{2} = n_j \int d^3 r' \frac{j_{0,k} \nabla_k (r'_i r'_j)}{2} = -n_j \int d^3 r' \frac{r'_i r'_j}{2} \nabla_k j_{0,k}.$$

Jetzt benutzen wir die Kontinuitätsgleichung:

$$g_i^{(E)} = -n_j \int d^3 r' \frac{r'_i r'_j}{2} i\omega \rho_0(r') = -\frac{i}{6} \omega n_j \left[Q_{0,ij} + \delta_{ij} \int d^3 r' (r')^2 \rho_0(r') \right].$$

Hier

$$Q_{0,ij} = \int d^3 r' \rho_0(r') \left[3r'_i r'_j - \delta_{ij} (r')^2 \right].$$

- (b) Zeigen Sie, dass der dritte Term in $\vec{g}^{(1)}$ kein elektrisches oder magnetisches Feld erzeugt.

Der Term liefert kein Beitrag zu $\vec{E}$ und $\vec{B}$ da

$$\vec{\nabla} \times (\vec{n}F(r)) = 0.$$

Damit

$$\vec{B}_0^{(1)} = \vec{\nabla} \times \vec{A}_0^{(1)} = \vec{\nabla} \times \frac{e^{ikr}}{cr}(-ik)\vec{g}^{(1)} \simeq \frac{k^2 e^{ikr}}{cr} \vec{n} \times \vec{g}^{(1)} = 0,$$

und

$$\vec{E}_0^{(1)} = -\vec{n} \times \vec{B}_0^{(1)} = 0.$$

2. Dipolstrahlung:

(2+2+1+3+2=10 Punkte)

- (a) Zwei leitende Kugeln bilden einen elektrischen Dipol, der an einer idealen Stromquelle $I(t) = I_0 e^{-i\omega t}$ gekoppelt ist.

1. Berechnen Sie die gesamte abgestrahlte Leistung für den Fall $d \ll \lambda$, wobei λ die Wellenlänge der Strahlung ist.

Die gesamte abgestrahlte Leistung ist

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c},$$

wobei der Maximalwert des Dipolmoments ist

$$p_0 = q_0 d = I_0 d / \omega.$$

Deswegen

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 I_0^2 d^2 \omega^2}{12\pi c}.$$

2. Zeigen Sie, dass der Strahlungswiderstand durch

$$R_s = 790 \frac{d^2}{\lambda^2} [\Omega]$$

gegeben ist. ($[\Omega]$ bezeichnet hier die SI-Einheit des Widerstands - Ohm).

Die Wärmeleistung ist

$$P = I^2 R = I_0^2 R_s \cos^2 \omega t \quad \Rightarrow \quad \langle P \rangle = \frac{1}{2} I_0^2 R_s.$$

Deswegen finden wir

$$R_s = \frac{\mu_0 d^2 \omega^2}{6\pi c}.$$

Führen wir die Wellenlänge ein:

$$\omega = 2\pi c / \lambda \quad \Rightarrow \quad R_s = \frac{2\pi}{3} \mu_0 c \frac{d^2}{\lambda^2} \approx 789.6 \frac{d^2}{\lambda^2} [\Omega].$$

3. Berechnen Sie den Strahlungswiderstand für die Wellenlänge der Neue Welle Karlsruhe.

Die Frequenz der Neue Welle Karlsruhe ist

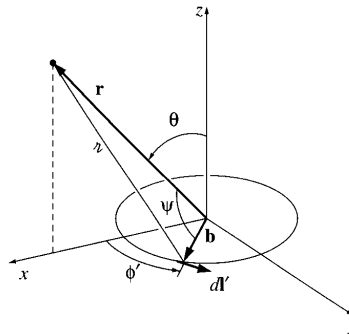
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 101.8 \text{ MHz} \Rightarrow \lambda = 2.95 \text{ m}.$$

In einem üblichen Radio $d = 5 \text{ cm}$, deswegen

$$R_s = 0.23 \Omega.$$

- (b) Eine leitende kreisförmige Schleife, die senkrecht zur z -Achse ausgerichtet ist, ist an einer idealen Stromquelle $I(t) = I_0 e^{-i\omega t}$ gekoppelt. Der Radius der Schleife, b , ist viel kleiner als die Wellenlänge, $b \ll \lambda$.

1. Berechnen Sie $\frac{dP}{d\Omega}[\theta, \varphi]$, d.h., die abgestrahlte Leistung pro Raumwinkel.



Das magnetische Dipolmoment:

$$\vec{m}(t) = \pi b^2 I(t) \vec{e}_z = \vec{e}_z m_0 \cos \omega t, \quad m_0 \equiv \pi b^2 I_0.$$

Das retardierte Vektorpotential beträgt

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\vec{l}' \frac{I_0 \cos[\omega(t - z/c)]}{z} = \vec{e}_y \frac{\mu_0 I_0 b}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' \cos \phi' \frac{\cos[\omega(t - z/c)]}{z},$$

wobei (siehe Abbildung)

$$z = \sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \psi} = \sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \phi' \sin \theta}.$$

In der Näherung $b \ll \lambda \ll r$:

$$z \approx r \left[1 - \frac{b}{r} \cos \phi' \sin \theta \right];$$

$$\cos[\omega(t - z/c)] \approx \cos[\omega(t - r/c)] - \frac{\omega b}{c} \cos \phi' \sin \theta \sin[\omega(t - r/c)];$$

und deswegen

$$\vec{A}(r, \theta, t) \approx \vec{e}_\phi \frac{\mu_0 m_0 \omega}{4\pi c r} \sin \theta \sin[\omega(t - r/c)].$$

Aus $\vec{A}$ erhalten wir die Felder

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \approx \vec{e}_\phi \frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c r} \sin \theta \cos[\omega(t - r/c)],$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \approx -\vec{e}_\theta \frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c^2 r} \sin \theta \cos[\omega(t - r/c)].$$

Der Poynting-Vektor ist

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \approx \vec{e}_r \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{16\pi^2 c^3 r^2} \sin^2 \theta \cos^2 [\omega(t - r/c)].$$

Das Intensitätsprofil ist

$$\frac{dP}{d\Omega}[\theta, \varphi] = \langle \vec{S} \rangle \vec{e}_r r^2 = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c^3} \sin^2 \theta.$$

2. *Bestimmen Sie den Strahlungswiderstand. Drücken Sie das Ergebnis durch λ und b aus und vergleichen Sie es mit dem Strahlungswiderstand eines elektrischen Dipols.*

Die gesamte abgestrahlte Leistung beträgt

$$\langle P \rangle = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \frac{dP}{d\Omega}[\theta, \varphi] = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{12\pi c^3}.$$

Der Strahlungswiderstand erhalten wir von

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_0^2 R_s,$$

deswegen

$$R_s = \frac{\mu_0 \pi b^4 \omega^4}{6c^3} = \frac{8}{3} \pi^5 \mu_0 c \frac{b^4}{\lambda^4} = 3.08 \times 10^5 \frac{b^4}{\lambda^4} \Omega.$$

Das ist viel kleiner als der Strahlungswiderstand eines elektrischen Dipols:

$$\frac{R_s^M}{R_s^E} = \frac{3.08 \times 10^5}{789.6} \frac{b^2}{\lambda^2} = 390 \frac{b^2}{\lambda^2} \ll 1.$$

3. Quadrupolstrahlung:

(2+2+2+4=10 Punkte)

- (a) Betrachten Sie zwei entgegengesetzt orientierte schwingende elektrische Dipole in Abstand d als Modell der elektrischen Quadrupolstrahlung.

1. Bestimmen Sie das Skalar- und das Vektor-Potential in Lorenz-Eichung.

In Fernfeld ist das Skalar-Potential jedes Dipols

$$V_{\pm} = \mp \frac{p_0 \omega}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta_{\pm}}{r_{\pm}} \sin [\omega (t - r_{\pm}/c)].$$

Das gesamte Potential ist

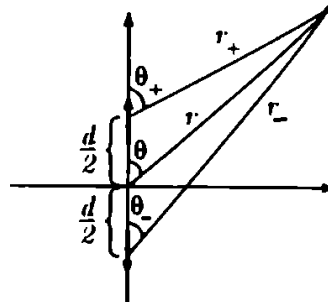
$$V = V_+ + V_-.$$

Hier ($d \ll \lambda \ll r$)

$$r_{\pm} = \sqrt{r^2 + d^2/4 \mp rd \cos \theta} \approx r \left[1 \mp \frac{d}{2r} \cos \theta \right],$$

und

$$\cos \theta_{\pm} = \frac{r \cos \theta \mp d/2}{r_{\pm}} \approx \cos \theta \mp \frac{d}{2r} \sin^2 \theta.$$



Jetzt finden wir das Potential:

$$\sin [\omega (t - r_{\pm}/c)] \approx \sin [\omega (t - r/c)] \pm \frac{\omega d}{2c} \cos \theta \cos [\omega (t - r/c)];$$

$$V_{\pm} \approx \frac{p_0 \omega}{4\pi\epsilon_0 c r} \left[\mp \cos \theta \sin [\omega (t - r/c)] - \frac{\omega d}{2c} \cos^2 \theta \cos [\omega (t - r/c)] - \frac{d}{2r} \cos 2\theta \sin [\omega (t - r/c)] \right];$$

$$V \approx -\frac{p_0 \omega}{4\pi\epsilon_0 c r} \left[\frac{\omega d}{c} \cos^2 \theta \cos [\omega (t - r/c)] + \frac{d}{r} \cos 2\theta \sin [\omega (t - r/c)] \right];$$

und letztendlich ($r \gg \lambda$)

$$V \approx -\frac{p_0 \omega^2 d}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \cos^2 \theta \cos [\omega (t - r/c)].$$

Das Vektor-Potential jedes Dipols finden wir als

$$\vec{A}_{\pm} = \mp \vec{e}_z \frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi r_{\pm}} \sin [\omega (t - r_{\pm}/c)],$$

$$\vec{A}_{\pm} \approx \vec{e}_z \frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi r} \left[\mp \sin [\omega (t - r/c)] - \frac{\omega d}{2c} \cos \theta \cos [\omega (t - r/c)] - \frac{d}{2r} \cos \theta \sin [\omega (t - r/c)] \right],$$

und deswegen das gesamte Vektor-Potential (in Fernfeld) ist

$$\vec{A} = \vec{A}_+ + \vec{A}_- \approx -\vec{e}_z \frac{\mu_0 p_0 \omega^2 d}{4\pi c r} \cos \theta \cos [\omega (t - r/c)].$$

2. Bestimmen Sie das E und das B-Feld.

Führen wir eine Bezeichnung ein:

$$\alpha = \frac{\mu_0 p_0 \omega^2 d}{4\pi c}.$$

Dann

$$\vec{A} \approx -\vec{e}_z \frac{\alpha}{r} \cos \theta \cos [\omega (t - r/c)] = -\frac{\alpha}{r} \cos \theta \cos [\omega (t - r/c)] [\vec{e}_r \cos \theta - \vec{e}_{\theta} \sin \theta].$$

Das magnetische Feld ist

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_{\theta}) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \vec{e}_{\phi} \approx \vec{e}_{\phi} \frac{\alpha \omega}{2cr} \sin 2\theta \sin [\omega (t - r/c)].$$

Das elektrische Feld ist

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Hier

$$\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_{\theta} \approx -\vec{e}_r \frac{\alpha \omega}{r} \cos^2 \theta \sin [\omega (t - r/c)].$$

Deswegen

$$\vec{E} \approx \vec{e}_{\theta} \frac{\alpha \omega}{2r} \sin 2\theta \sin [\omega (t - r/c)].$$

3. Bestimmen Sie den Poynting-Vektor sowie die abgestrahlte Leistung. Skizzieren Sie das Intensitätsprofil als Funktion von θ .

Der Poynting-Vektor ist

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \approx \vec{e}_r \frac{\alpha^2 \omega^2}{4\mu_0 c r^2} \sin^2 2\theta \sin^2 [\omega (t - r/c)].$$

Das Intensitätsprofil ist

$$\frac{dP}{d\Omega}[\theta, \varphi] = \langle \vec{S} \rangle \vec{e}_r r^2 = \frac{\alpha^2 \omega^2}{8\mu_0 c} \sin^2 2\theta.$$

Die gesamte abgestrahlte Leistung beträgt

$$\langle P \rangle = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \frac{dP}{d\Omega}[\theta, \varphi] = \frac{4\pi \alpha^2 \omega^2}{15\mu_0 c} = \frac{\mu_0 p_0^2 d^2 \omega^6}{60\pi c^3}$$

- (b) Betrachten Sie jetzt zwei schwingende Punktladungen $q_1 = q_2 = Q_0$. Die zeitabhängige Position der Punktladung q_1 lautet $\vec{r}_1 = (0, 0, d/2 + a \cos(\omega t))$. Für q_2 gilt $\vec{r}_2 = (0, 0, -d/2 - a \cos(\omega t))$. Bestimmen Sie den Poynting-Vektor sowie die abgestrahlte Leistung, wenn $2a < d \ll \lambda$.

Aus der Vorlesung ist folgendes bekannt:

$$\langle \vec{S} \rangle = \vec{n} \frac{k^2}{8\pi c r^2} |\vec{n} \times \vec{g}(k\vec{n})|^2, \quad \frac{dP}{d\Omega} = \frac{k^2}{8\pi c} |\vec{n} \times \vec{g}(k\vec{n})|^2.$$

Die Funktion $\vec{g}(k\vec{n})$ wurde in der Aufgabe 1 betrachtet. Für die Quadrupolstrahlung:

$$\vec{g}_{qp} = -ik\vec{g}_{qp}^{(1)} = -\frac{\omega k}{6} n_\alpha Q_{\alpha\beta} \vec{e}_\beta$$

Wegen Symmetrie:

$$Q_{xx} = Q_{yy} = -\frac{1}{2}Q_{zz}.$$

Deswegen

$$n_\alpha Q_{\alpha\beta} \vec{e}_\beta = Q_{xx} [\vec{n} - 3n_z \vec{e}_z].$$

Jetzt

$$\vec{n} \times \vec{g}(k\vec{n}) = -\frac{\omega k Q_{xx}}{6} \vec{n} \times [\vec{n} - 3n_z \vec{e}_z] = \frac{\omega k Q_{xx}}{2} n_z \vec{n} \times \vec{e}_z.$$

Hier

$$n_z = \cos \theta, \quad \vec{n} \times \vec{e}_z = -n_x \vec{e}_y + n_y \vec{e}_x = \sin \theta (-\vec{e}_y \cos \phi + \vec{e}_x \sin \phi).$$

Deswegen

$$|\vec{n} \times \vec{g}(k\vec{n})|^2 = \frac{\omega^2 k^2 Q_{xx}^2}{4} \cos^2 \theta \sin^2 \theta = \frac{\omega^2 k^2 Q_{xx}^2}{16} \sin^2 2\theta.$$

Damit finden wir den Poynting-Vektor

$$\vec{S}_{qp} = \vec{n} \frac{ck^6 Q_{xx}^2}{2^7 \pi r^2} \sin^2 2\theta.$$

Die abgestrahlte Leistung ist

$$\langle P \rangle = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \frac{dP}{d\Omega}[\theta, \varphi] = \frac{ck^6}{60} Q_{xx}^2.$$

Finden wir jetzt das Quadrupolmoment für die zwei Ladungen. Laut Definition

$$Q_{xx} = -2Q_0 \left(\frac{d}{2} + a \cos \omega t \right)^2.$$

Die Größe Q_{xx} in unserem Ergebnis ist eigentlich die erste Fourier-Komponente

$$Q_{xx} \rightarrow -Q_0 a d.$$

Die zweite Fourier-Komponente können wir vernachlässigen, wenn $a \ll d$. (Die Konstante ergibt keine Strahlung).

In dieser Näherung:

$$Q_{xx} = -Q_0 a d = -2p_0 d,$$

wobei $p_0 = Q_0 a/2$ das Dipolmoment einer schwingenden Ladung ist.

(c*)

(10 Bonuspunkte)

Verallgemeinern Sie die Ergebnisse von 3a und 3b für den Fall wenn die Bedingung $d \ll \lambda$ nicht mehr gilt.

Wenn die Bedingung $d \ll \lambda$ nicht mehr gilt, kann man die Quadrupolnäherung *nicht* benutzen. Man soll dann die Methode von 3a anwenden.

Der Unterschied ist, dass wir jetzt die folgende Funktion *nicht* entwickeln dürfen:

$$\sin [\omega (t - r_{\pm}/c)] \approx \sin \left[\omega \left(t - r/c \pm \frac{\omega d}{2c} \cos \theta \right) \right].$$

Dann finden wir folgenden Ergebnisse:

$$V = -\frac{p_0 \omega}{2\pi \epsilon_0 c r} \sin \left[\frac{\omega d}{2c} \cos \theta \right] \cos \theta \cos [\omega (t - r/c)],$$

$$\vec{A} = -\vec{e}_z \frac{\mu_0 p_0 \omega}{2\pi r} \sin \left[\frac{\omega d}{2c} \cos \theta \right] \cos [\omega (t - r/c)],$$

$$\vec{B} = \vec{e}_\phi \frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{2\pi c r} \sin \left[\frac{\omega d}{2c} \cos \theta \right] \sin \theta \sin [\omega (t - r/c)],$$

$$\vec{E} = \vec{e}_\theta \frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{2\pi r} \sin \left[\frac{\omega d}{2c} \cos \theta \right] \sin \theta \sin [\omega (t - r/c)].$$

Hier haben wir die Terme $\sim 1/r^2$ und $\sim d/r$ vernachlässigt.

Der Poynting-Vektor ist

$$\vec{S} = \vec{e}_r \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{4\pi^2 c r^2} \sin^2 \left[\frac{\omega d}{2c} \cos \theta \right] \sin^2 \theta \sin^2 [\omega (t - r/c)].$$

Das Intensitätsprofil ist

$$\frac{dP}{d\Omega}[\theta, \varphi] = \langle \vec{S} \rangle \vec{e}_r r^2 = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{8\pi^2 c} \sin^2 \left[\frac{\omega d}{2c} \cos \theta \right] \sin^2 \theta.$$

Die gesamte abgestrahlte Leistung beträgt

$$\langle P \rangle = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \frac{dP}{d\Omega}[\theta, \varphi] = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{4\pi c} \int_0^\pi d\theta \sin^3 \theta \sin^2 \left[\frac{\omega d}{2c} \cos \theta \right].$$

Hier

$$\int_0^\pi d\theta \sin^3 \theta \sin^2 a \theta = \frac{9 - 80a^2 + 32a^4 - 9 \cos(2\pi a)}{27 - 120a + 48a^4}.$$