

## Klassische Theoretische Physik III WS 2014/2015

Prof. Dr. A. Shnirman

Blatt 12

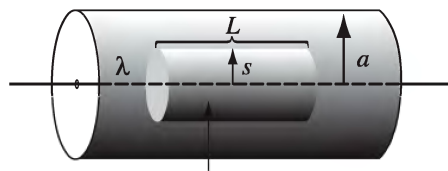
Dr. B. Narozhny

Abgabe 23.01.2015, Besprechung 28.01.2015

## 1. Elektrische Verschiebung:

(10 Punkte)

Ein langer gerader Draht trägt die gleichförmige Linienladung  $\lambda$ . Er ist bis zu einem Radius  $a$  von einer Gummiisolierung umgeben. Bestimmen Sie die elektrische Verschiebung.



In der Vorlesung wurde festgestellt, dass sich durch die Polarisation im Inneren des Dielektrikums Polarisationsladungen  $\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$ . Dann lässt sich innerhalb des Dielektrikums die gesamte Ladungsdichte als

$$\rho = \rho_p + \rho_e,$$

wobei  $\rho_e$  die freie (oder äußere) Ladungen beschreibt. Das Gauß'sche Gesetz nimmt die folgende Form an

$$\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho = \rho_p + \rho_e = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} + \rho_e.$$

Da die elektrische Verschiebung als  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  definiert ist, gilt es

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_e.$$

In integraler Form lautet dieses Gesetz:

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{a} = Q,$$

Darin steht  $Q$  für die gesamte freie Ladung, die in dem Volumen enthalten ist.

Jetzt, zeichnen wir eine zylinderförmige Gauß'sche Oberfläche mit Radius  $s$  und Länge  $L$  und erhalten wir

$$2\pi s L D = \lambda L.$$

Daher ist

$$\vec{D} = \frac{\lambda}{2\pi s} \vec{e}_r.$$

Beachten Sie, dass diese Formel sowohl innerhalb des Isoliermaterials als auch außerhalb davon gilt. Außerhalb ist  $\vec{P} = 0$  und daher

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \vec{D} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s} \vec{e}_r, \quad s > a.$$

Innerhalb des Gummimaterials kann das elektrische Feld nicht bestimmt werden, denn dort kennen wir  $\vec{P}$  nicht.

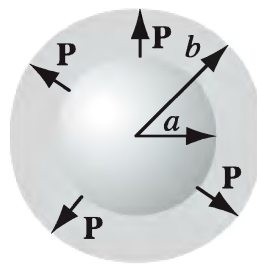
## 2. Elektrische Polarisation:

(10 Punkte)

Eine dicke Kugelschale (mit Innenradius  $a$  und Außenradius  $b$ ) besteht aus einem dielektrischen Material mit "eingefrorenen" Polarisation

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{A\vec{r}}{r^2}.$$

Darin ist  $A$  eine Konstante, und  $r$  ist die Entfernung vom Mittelpunkt. Es gibt in dieser Aufgabe keine freien Ladungen.



Bestimmen Sie in allen drei Gebieten das elektrische Feld mithilfe zweier unterschiedlicher Methoden:

- (a) Bestimmen Sie alle Polarisationsladungen und berechnen Sie das davon hervorgerufene Feld mithilfe des Gauß'schen Gesetzes.

Bestimmen wir erst die Polarisationsladung. Die induzierte Ladungsdichte ist

$$\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{A}{r} \right) = -\frac{A}{r^2}.$$

Die Oberflächendichte ist

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n} = \begin{cases} +\vec{P} \cdot \vec{e}_r = A/b, & (r = b) \\ -\vec{P} \cdot \vec{e}_r = A/a, & (r = a) \end{cases}$$

Laut dem Gauß'schen Gesetz

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r.$$

Darin steht  $Q$  für die *gesamte* Ladung, die in dem Volumen enthalten ist.

Für  $r < a$  und  $r > b$

$$Q = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = 0.$$

Für  $a < r < b$

$$Q = -\frac{A}{a}4\pi a^2 - A \int_a^r dr' 4\pi (r')^2 \frac{1}{(r')^2} = -4\pi Ar \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -\frac{A}{\epsilon_0 r} \vec{e}_r.$$

- (b) *Bestimmen Sie die elektrische Verschiebung mithilfe des Gauß'schen Gesetzes und danach das elektrische Feld.*

In integraler Form lautet dieses Gesetz:

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{a} = Q_e,$$

Darin steht  $Q_e$  für die *gesamte freie* Ladung, die in dem Volumen enthalten ist. Es gibt keine freie Ladungen in dieser Aufgabe, deswegen

$$Q_e = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{D} = 0.$$

Das elektrische Feld finden wir als

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0} = \begin{cases} 0, & (r < a) \\ -\vec{e}_r A / (\epsilon_0 r), & (a < r < b) \\ 0, & (r > b). \end{cases}$$

### 3. Elektrisches Feld in Dielektrikum:

(10 Punkte)

*Nehmen Sie an, das Feld im Inneren eines großen Bereichs eines Dielektrikums sei  $\vec{E}_0$ , sodass die elektrische Verschiebung  $\vec{D}_0 = \epsilon_0 \vec{E}_0 + \vec{P}$  beträgt.*



- (a) *Nun wird ein kleiner kugelförmiger Hohlraum aus dem Material herausgearbeitet. Drücken Sie das Feld im Mittelpunkt des Hohlraums durch  $\vec{E}_0$  und  $\vec{P}$  aus. Drücken Sie zudem die Verschiebung im Mittelpunkt des Hohlraums durch  $\vec{E}_0$  und  $\vec{P}$  aus.*

Das elektrische Feld ist gleich  $\vec{E}_0$  minus das Feld einer gleichförmigen polarisierten Kugel. Wenn die Polarisation gleichförmig ist, gibt's keine Volumenladungsdichte  $\rho_p = 0$ . Die Oberflächendichte ist

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n} = P \cos \theta.$$

Das resultierende Potential kann man entweder durch direkte Integration berechnen oder mit Hilfe der Separation der Variablen. Für den Innenraum haben wir

$$V(r < R, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta).$$

Im Außenraum haben wir

$$V(r > R, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta).$$

Weil das Potential bei  $r = R$  stetig ist, finden wir

$$B_l = A_l R^{2l+1}.$$

Die radiale Ableitung von  $V$  an der Oberfläche erfährt eine Unstetigkeit (d.h., das E-Feld erfährt einen Sprung)

$$\left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r=R+0} - \left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r=R-0} = -\frac{1}{\epsilon_0} \sigma_p(\theta).$$

Daher ist

$$A_1 = \frac{P}{3\epsilon_0}, \quad A_{l \neq 1} = 0.$$

Das Potential ist dann

$$V(r, \theta) = \frac{P}{3\epsilon_0} \cos \theta \begin{cases} r, & r < R, \\ R^3/r^2, & r > R. \end{cases}$$

Das Feld im Inneren der Kugel ist dann gleichförmig

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P}.$$

Jetzt können wir das Feld im Hohlraum bestimmen.

Das elektrische Feld beträgt

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P}.$$

Deswegen

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E}_0 + \frac{1}{3} \vec{P} = \vec{D}_0 - \frac{2}{3} \vec{P}.$$

- (b) *Wiederholen Sie diese Rechnungen für einen langen, nadelförmigen Hohlraum, der Parallel zu  $\vec{P}$  verläuft.*

Das elektrische Feld ist gleich  $\vec{E}_0$  minus das Feld zweier Ladungen, die sich am Ende der "Nadel" befinden. Diese sind klein und (unendlich) weit weg, deswegen beträgt das elektrische Feld

$$\vec{E} = \vec{E}_0.$$

Deswegen

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E}_0 = \vec{D}_0 - \vec{P}.$$

- (c) *Wiederholen Sie diese Rechnungen für einen dünnen scheibenförmigen Hohlraum, auf dem  $\vec{P}$  senkrecht steht.*

Das elektrische Feld ist gleich  $\vec{E}_0$  minus das Feld eines Kondensators mit Plattenladungsdichte  $\sigma = P$ . Dieses Feld wurde in Vorlesung besprochen. Es ist  $-P/\epsilon_0$ . Deswegen beträgt das elektrische Feld:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \frac{1}{\epsilon_0} \vec{P}.$$

Deswegen

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E}_0 + \vec{P} = \vec{D}_0.$$