

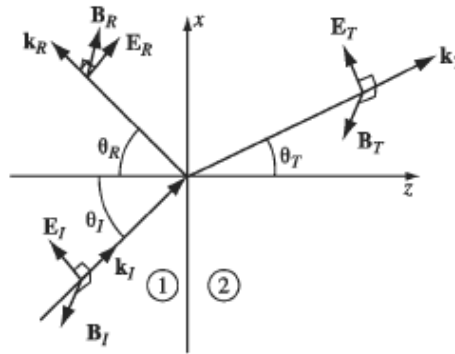
Klassische Theoretische Physik III WS 2014/2015

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. B. NarozhnyBlatt 13
Lösung

1. Brewster-Winkel:

(20 Punkte)

In der Vorlesung wurde die Reflexion und die Transmission an der Grenze zwischen den zwei linearen Medien (ohne Dämpfung) besprochen. Der Brechungsindex des Mediums (1) ist n_1 und des Mediums (2) - n_2 . Analysieren Sie den Fall der Polarisation der einfallenden Welle parallel zur Einfallsebene (siehe Abbildung).



- (a) Zeigen Sie, dass die reflektierte und transmittierte Welle ebenfalls in der Einfallsebene (die x - z -Ebene in Abbildung) polarisiert sind.

Die genauen elektrodynamischen Randbedingungen lauten

$$\epsilon_1 E_1^\perp = \epsilon_2 E_2^\perp, \quad E_1^\parallel = E_2^\parallel,$$

$$B_1^\perp = B_2^\perp, \quad \frac{1}{\mu_1} B_1^\parallel = \frac{1}{\mu_2} B_2^\parallel.$$

Wir betrachten die monochromatische ebene Wellen: die einfallende Welle

$$\vec{E}_I = \vec{E}_{0I} e^{i(\vec{k}_I \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad \vec{B}_I = \frac{1}{v_1} [\vec{e}_{\vec{k}_I} \times \vec{E}_I],$$

die reflektierte Welle

$$\vec{E}_R = \vec{E}_{0R} e^{i(\vec{k}_R \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad \vec{B}_R = \frac{1}{v_1} [\vec{e}_{\vec{k}_R} \times \vec{E}_R],$$

und die transmittierte Welle

$$\vec{E}_T = \vec{E}_{0T} e^{i(\vec{k}_T \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad \vec{B}_T = \frac{1}{v_2} [\vec{e}_{\vec{k}_T} \times \vec{E}_T].$$

Alle drei Wellen weisen dieselbe Frequenz ω auf. Die drei Wellenzahlen sind

$$k_I v_1 = k_R v_1 = k_T v_2 = \omega \quad \Rightarrow \quad k_I = k_R = \frac{v_1}{v_2} k_T = \frac{n_1}{n_2} k_T.$$

Da die Randbedingungen für alle Punkte der Ebene sowie jeden Zeitpunkt gelten müssen, müssen die Exponentialfaktoren für $z = 0$ gleich sind

$$\vec{k}_I \cdot \vec{r} = \vec{k}_R \cdot \vec{r} = \vec{k}_T \cdot \vec{r}, \quad \text{wenn } z = 0.$$

Deswegen

$$k_{Ix} = k_{Rx} = k_{Tx}, \quad k_{Iy} = k_{Ry} = k_{Ty}.$$

Für die Amplituden erhalten wir

$$\begin{aligned} \epsilon_1 \left(\vec{E}_{0I} + \vec{E}_{0R} \right)_z &= \epsilon_2 \left(\vec{E}_{0T} \right)_z, & \left(\vec{B}_{0I} + \vec{B}_{0R} \right)_z &= \left(\vec{B}_{0T} \right)_z, \\ \left(\vec{E}_{0I} + \vec{E}_{0R} \right)_{x,y} &= \left(\vec{E}_{0T} \right)_{x,y}, & \frac{1}{\mu_1} \left(\vec{B}_{0I} + \vec{B}_{0R} \right)_{x,y} &= \frac{1}{\mu_2} \left(\vec{B}_{0T} \right)_{x,y}, \end{aligned}$$

wobei in jedem der Fälle

$$\vec{B}_0 = \frac{1}{v} \left[\vec{e}_{\vec{k}} \times \vec{E}_0 \right]$$

gilt.

Wenn die einfallende Welle parallel polarisiert ist, gilt

$$\left(\vec{E}_{0I} \right)_y = \left(\vec{B}_{0I} \right)_x = \left(\vec{B}_{0I} \right)_z = 0.$$

Dann bekommen wir

$$\frac{1}{\mu_1} \left(\vec{B}_{0R} \right)_x = \frac{1}{\mu_2} \left(\vec{B}_{0T} \right)_x, \quad \left(\vec{B}_{0R} \right)_z = \left(\vec{B}_{0T} \right)_z, \quad \left(\vec{E}_{0R} \right)_y = \left(\vec{E}_{0T} \right)_y,$$

Hier ist die gleiche Polarizierung

$$\left(\vec{E}_{0R} \right)_y = \left(\vec{E}_{0T} \right)_y = 0$$

eine natürliche Lösung.

Wenn wir sich eine andere Lösung vorstellen, dann ergibt die Beziehung zwischen $\vec{B}$ und $\vec{E}$

$$\begin{aligned} \vec{B}_{0T} &= \frac{1}{v_2} \left[\vec{e}_{\vec{k}} \times \left(\left(\vec{E}_{0T} \right)_x \vec{e}_x + \left(\vec{E}_{0T} \right)_y \vec{e}_y + \left(\vec{E}_{0T} \right)_z \vec{e}_z \right) \right] \\ &= \left(\vec{B}_{0T} \right)_y \vec{e}_y + \frac{1}{v_2} \left(\vec{E}_{0T} \right)_y [-\vec{e}_x \cos \theta_T + \vec{e}_z \sin \theta_T], \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \vec{B}_{0R} &= \frac{1}{v_1} \left[\vec{e}_{\vec{k}} \times \left(\left(\vec{E}_{0R} \right)_x \vec{e}_x + \left(\vec{E}_{0R} \right)_y \vec{e}_y + \left(\vec{E}_{0R} \right)_z \vec{e}_z \right) \right] \\ &= \left(\vec{B}_{0R} \right)_y \vec{e}_y + \frac{1}{v_1} \left(\vec{E}_{0R} \right)_y [\vec{e}_x \cos \theta_R + \vec{e}_z \sin \theta_R], \end{aligned}$$

Damit kann man die zwei Bedingungen

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu_1} \left(\vec{B}_{0R} \right)_x &= \frac{1}{\mu_2} \left(\vec{B}_{0T} \right)_x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\mu_1 v_1} \cos \theta_R = -\frac{1}{\mu_2 v_2} \cos \theta_T, \\ \left(\vec{B}_{0R} \right)_z &= \left(\vec{B}_{0T} \right)_z \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{v_1} \sin \theta_R = \frac{1}{v_2} \sin \theta_T,\end{aligned}$$

gleichzeitig nicht erfüllen. Deswegen ist eine solche Lösung unmöglich.

- (b) Finden Sie die reflektierten und transmittierten Amplituden des elektrischen Feld als Funktionen vom Einfallswinkel θ_I .

Wenn die reflektierte und transmittierte Welle in der x - z -Ebene polarisiert sind, werden die Randbedingungen für die Amplituden

$$\epsilon_1 (-E_{0I} \sin \theta_I + E_{0R} \sin \theta_R) = \epsilon_2 (-E_{0T} \sin \theta_T)_z,$$

$$E_{0I} \cos \theta_I + E_{0R} \cos \theta_R = E_{0T} \cos \theta_T, \quad \frac{1}{\mu_1 v_1} (E_{0I} - E_{0R}) = \frac{1}{\mu_2 v_2} E_{0T}.$$

Zusammen mit dem Reflexions- und Brechungsgesetz reduzieren sich diese Gleichungen zu

$$E_{0I} + E_{0R} = \alpha E_{0T}, \quad E_{0I} - E_{0R} = \beta E_{0T},$$

wobei

$$\beta = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} = \frac{\mu_1 n_1}{\mu_2 n_2}, \quad \alpha = \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I}.$$

Durch Lösen dieser Gleichungen für die reflektierten und transmittierten Amplituden erhalten wir

$$E_{0R} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} E_{0I}, \quad E_{0T} = \frac{2}{\alpha + \beta} E_{0I}.$$

- (c) Finden Sie einen Winkel θ_B (namens Brewster-Winkel), bei dem die reflektierte Welle vollständig verschwindet.

Die reflektierte Welle verschwindet wenn

$$\alpha = \beta.$$

Hier ist α eine Funktion von θ_I :

$$\alpha = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_T}}{\cos \theta_I} = \frac{\sqrt{1 - (n_1/n_2)^2 \sin^2 \theta_I}}{\cos \theta_I}.$$

Lösen wir jetzt die Gleichung $\alpha = \beta$ und finden

$$\sin^2 \theta_B = \frac{1 - \beta^2}{(n_1/n_2)^2 - \beta^2}.$$

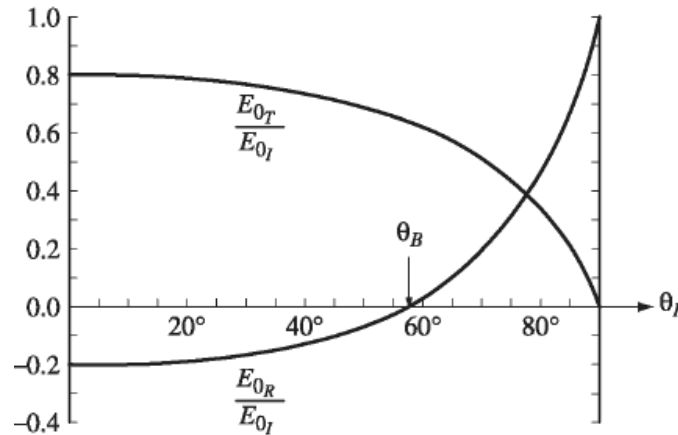
Beim üblichen Fall ist $\mu_1 \simeq \mu_2$, sodass $\beta \simeq n_2/n_1$ und

$$\sin^2 \theta_B \simeq \frac{\beta^2}{1 + \beta^2},$$

daher gilt

$$\tan \theta_B \simeq \frac{n_2}{n_1}.$$

- (d) Skizzieren Sie die Verhältnisse E_{0R}/E_{0I} und E_{0T}/E_{0I} als Funktion von θ_I .



Hier $n_1 = 1$ (Luft), $n_2 = 1.5$ (Glas) und die negative Werte bedeuten, dass die Phase der Welle um 180° gegen den entfallenden Strahl verschoben ist. Die Amplitude selbst ist der Absolutwert.

- (e) Bestimmen Sie den Reflexionskoeffizient und den Transmissionskoeffizient für den Energiefluss.

Die Leistung pro Flächeneinheit, die auf der Grenzfläche auftrifft, lautet $\vec{S} \cdot \vec{e}_z$. Die auftreffende Intensität ist daher

$$I_I = \frac{1}{2} \epsilon_1 v_1 E_{0I}^2 \cos \theta_I,$$

während die reflektierte und transmittierte Intensität

$$I_R = \frac{1}{2} \epsilon_1 v_1 E_{0R}^2 \cos \theta_R, \quad I_T = \frac{1}{2} \epsilon_2 v_2 E_{0T}^2 \cos \theta_T$$

beträgt. Der Kosinus tritt auf, weil wir hier die mittlere Leistung pro Flächeneinheit an der Grenzfläche betrachten. Die Grenzfläche ist gegenüber der Wellenfront geneigt.

Die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten lauten:

$$R \equiv \frac{I_R}{I_I} = \frac{E_{0R}^2}{E_{0I}^2} = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right)^2,$$

$$T \equiv \frac{I_T}{I_I} = \frac{\epsilon_1 v_1 \cos \theta_T}{\epsilon_2 v_2 \cos \theta_I} \frac{E_{0T}^2}{E_{0I}^2} = \frac{4\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2}.$$

2. Elektromagnetische Wellen in Leitern:

(10 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass die Eindringtiefe in einem schlechten Leiter ($\sigma \ll \omega\epsilon$) (unabhängig von der Frequenz) $(2/\sigma)\sqrt{\epsilon/\mu}$ beträgt. Bestimmen Sie die Eindringtiefe (in Meter) für (reines) Wasser.

Der Imaginärteil vom Wellenvektor ist

$$\kappa = \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \left[\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}} - 1 \right]^{1/2} \simeq \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \left[1 + \frac{\sigma^2}{2\epsilon^2\omega^2} - 1 \right]^{1/2} = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}.$$

Die Eindringtiefe ist dann

$$d = \frac{1}{\kappa} \simeq \frac{2}{\sigma} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}.$$

Für Wasser:

$$\epsilon = 80.1\epsilon_0, \quad \mu \simeq \mu_0, \quad \sigma = 0.4 \times 10^{-5} \quad \Rightarrow \quad d = 1.19 \times 10^4 \text{m}.$$

- (b) Zeigen Sie, dass die Eindringtiefe in einem guten Leiter ($\sigma \gg \omega\epsilon$) $\lambda/2\pi$ beträgt (wobei λ die Wellenlänge im Inneren des Leiters darstellt). Bestimmen Sie die Eindringtiefe (in Nanometer) für ein typisches Metall im sichtbaren Bereich ($\omega \approx 10^{15}/\text{s}$) unter der Annahme $\epsilon \approx 1$ und $\mu \approx 1$.

Der Realteil vom Wellenvektor ist

$$K = \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \left[\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}} + 1 \right]^{1/2} \simeq \kappa,$$

weil $\sigma^2/(\epsilon\omega)^2$ jetzt dominiert. Dann

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \simeq \frac{2\pi}{\kappa} = 2\pi d \quad \Rightarrow \quad d = \frac{\lambda}{2\pi}.$$

Im typischen Metall

$$\kappa \simeq \sqrt{\omega\mu\sigma} = 8 \times 10^7 \quad \Rightarrow \quad d = \frac{1}{\kappa} = 1.3 \times 10^{-8} = 13 \text{nm}.$$

- (c) Warum sind Metalle undurchsichtig?

Die Eindringtiefe ist ziemlich klein (13 nm), d.h. die Felder dringen nicht weit in Metall. Deswegen sind Metalle undurchsichtig.

- (d) Zeigen Sie, dass in einem guten Leiter das magnetische Feld 45° hinter dem elektrischen Feld zurückbleibt, und bestimmen Sie das Verhältnis ihrer Amplituden. Benutzen Sie als numerisches Beispiel das "typische Metall" aus Teil (b).

$$\varphi = \arctan \frac{\kappa}{k}.$$

Da $\kappa \simeq k$, folgt es $\varphi=45^\circ$.

Das Verhältnis der Amplituden der Felder ist

$$\frac{B_0}{E_0} = \sqrt{\epsilon\mu} \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}} \simeq \sqrt{\frac{\sigma\mu}{\omega}}.$$

Im typischen Metall

$$\frac{B_0}{E_0} = 10^{-7} \frac{\text{s}}{\text{m}}.$$

Im Vakuum

$$\frac{B_0}{E_0} = \frac{1}{c} = 3 \times 10^{-9} \frac{\text{s}}{\text{m}}.$$