

Klassische Theoretische Physik III WS 2014/2015**Prof. Dr. A. Shnirman**
Dr. B. Narozhny**Blatt 14**
Lösungen**1. Relativistische Elektrodynamik:**

(7+7+3+3=20 Punkte)

In der Vorlesung wurde die allgemeinen Transformationsgesetze für elektromagnetische Felder besprochen. Betrachten Sie jetzt eine Punktladung in gleichförmiger Bewegung.

- (a) *Eine Punktladung q ruht im System $\mathcal{S}_0$ im Ursprung. Wie lautet das elektrische Feld derselben Ladung im System $\mathcal{S}$, welches sich nach rechts mit der Geschwindigkeit v_0 relativ zu $\mathcal{S}_0$ bewegt?*

Im $\mathcal{S}_0$ lautet das Feld:

$$\vec{E}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\vec{r}}{r^3},$$

bzw.

$$E_{x0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}},$$

$$E_{y0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qy_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}},$$

$$E_{z0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qz_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}}.$$

Aufgrund des Transformationsgesetzes haben wir

$$E_x = E_{x0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}},$$

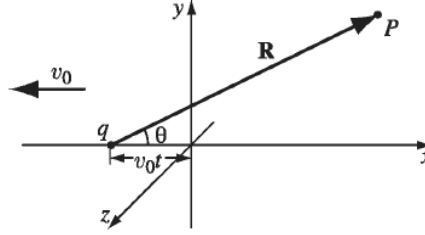
$$E_y = \gamma_0 E_{y0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma_0 q y_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}},$$

$$E_z = \gamma_0 E_{z0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma_0 q z_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}}.$$

Sie werden immer noch durch die Koordinaten des Feldpunkts $P(x_0, y_0, z_0)$ aus $\mathcal{S}_0$ ausgedrückt. Wir bevorzugen die Schreibweise mit den $\mathcal{S}$ -Koordinaten von P . Aus den Lorentz-Transformationen (oder genauer, den inversen Transformationen) erhalten wir

$$x_0 = \gamma_0(x + v_0 t) = \gamma_0 R_x, \quad y_0 = y = R_y, \quad z_0 = z = R_z.$$

Hier ist jeweils $\vec{R}$ der Vektor von q nach P , siehe Abbildung.



Daher ist

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma_0 q \vec{R}}{(\gamma_0^2 R^2 \cos^2 \theta + R^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q (1 - v_0^2/c^2)}{[1 - (v_0^2/c^2) \sin^2 \theta]^{3/2}} \frac{\vec{R}}{R^3}.$$

- (b) *Bestimmen Sie das magnetische Feld einer Punktladung q , die sich mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt.*

Im Ruhesystem des Teilchens ($\mathcal{S}_0$) ist das magnetische Feld null, daher ist in einem System $\mathcal{S}$, das sich mit v nach rechts bewegt

$$\vec{B} = -\frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}.$$

Das elektrische Feld haben wir in Aufgabe 1a berechnet. Das magnetische Feld ist dann

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q v_0 (1 - v_0^2/c^2) \sin \theta}{[1 - (v_0^2/c^2) \sin^2 \theta]^{3/2}} \frac{\vec{e}_\varphi}{R^2},$$

wobei $\vec{e}_\varphi$ in Gegenuhrzeigersinn weist, wenn die Ladung Ihnen entgegen kommt.

Interessanterweise reduziert sich das Ergebnis im nichtrelativistischen Fall ($v \ll c$) auf

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{v} \times \vec{R}}{R^3},$$

und das ist genau dasselbe Ergebnis, das Ihnen auch die naive Anwendung des Biot-Savart'schen Gesetzes auf eine Punktladung liefert.

- (c) *Bestätigen Sie, dass das Feld einer gleichförmig bewegten Punktladung dem Gauß'schen Gesetz gehorcht, indem Sie über eine Kugel mit Radius R integrieren, deren Mittelpunkt in der Ladung liegt.*

Benutzen wir das Ergebnis von Aufgabe 1a. Dann

$$\begin{aligned} \int \vec{E} \cdot d\vec{a} &= \frac{q (1 - v_0^2/c^2)}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{R^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{R^2 [1 - (v_0^2/c^2) \sin^2 \theta]^{3/2}} \\ &= 2\pi \frac{q (1 - v_0^2/c^2)}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{[1 - (v_0^2/c^2) \sin^2 \theta]^{3/2}} = \frac{q}{\epsilon_0}. \end{aligned}$$

(d) Bestimmen Sie den Poynting-Vektor einer gleichförmig bewegten Punktladung.

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{R} \times \vec{e}_\varphi}{(4\pi)^2 \epsilon_0 R^5} \frac{q^2 (1 - v_0^2/c^2)^2 v \sin \theta}{[1 - (v_0^2/c^2) \sin^2 \theta]^3} = -\frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 R^4} \frac{(1 - v_0^2/c^2)^2 v \sin \theta}{[1 - (v_0^2/c^2) \sin^2 \theta]^3}.$$

2. Elektromagnetische Wellen:

(1+3+3+3=10 Punkte)

Eine elektromagnetische ebene Welle der Frequenz ω bewegt sich in x -Richtung durch das Vakuum. Sie ist in y -Richtung polarisiert, und die Amplitude des elektrischen Felds ist E_0 .

(a) Schreiben Sie das elektrische und magnetische Feld $\vec{E}(x, y, z, t)$ und $\vec{B}(x, y, z, t)$ auf.

$$\vec{E}(x, y, z, t) = E_0 \cos(kx - \omega t) \vec{e}_y, \quad \vec{B}(x, y, z, t) = \frac{E_0}{c} \cos(kx - \omega t) \vec{e}_z, \quad k \equiv \frac{\omega}{c}.$$

(b) Dieselbe Welle wird aus dem Inertialsystem $\bar{\mathcal{S}}$ heraus beobachtet, das sich relativ zum ursprünglichen System $\mathcal{S}$ mit Geschwindigkeit v in x -Richtung bewegt. Bestimmen Sie das elektrische und magnetische Feld in $\bar{\mathcal{S}}$ und drücken Sie durch die Koordinaten in $\bar{\mathcal{S}}$ aus: $\vec{E}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$ und $\vec{B}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$.

Aufgrund des Transformationsgesetzes haben wir

$$\bar{E}_x = \bar{E}_z = 0, \quad \bar{E}_y = \gamma(E_y - vB_z) = \alpha E_0 \cos(kx - \omega t),$$

$$\bar{B}_x = \bar{B}_y = 0, \quad \bar{B}_z = \gamma(B_z - \frac{v}{c^2} E_y) = \alpha \frac{E_0}{c} \cos(kx - \omega t),$$

$$\alpha \equiv \gamma \left(1 - \frac{v}{c}\right) = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}.$$

Aus den Lorentz-Transformationen (oder genauer, den inversen Transformationen) erhalten wir

$$x = \gamma(\bar{x} + v\bar{t}), \quad t = \gamma\left(\bar{t} + \frac{v}{c^2}\bar{x}\right),$$

deswegen

$$kx - \omega t = \bar{k}\bar{x} - \bar{\omega}\bar{t}, \quad \bar{k} \equiv \gamma\left(k - \frac{\omega v}{c^2}\right) = \alpha k, \quad \bar{\omega} \equiv \gamma\omega\left(1 - \frac{v}{c}\right) = \alpha\omega.$$

Letztendlich finden wir

$$\vec{E}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}) = \bar{E}_0 \cos(\bar{k}\bar{x} - \bar{\omega}\bar{t}) \vec{e}_y, \quad \vec{B}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}) = \frac{\bar{E}_0}{c} \cos(\bar{k}\bar{x} - \bar{\omega}\bar{t}) \vec{e}_z, \quad \bar{E}_0 = \alpha E_0.$$

- (c) Welche Frequenz $\bar{\omega}$ hat die Welle in $\bar{\mathcal{S}}$? Interpretieren Sie dieses Ergebnis. Welche Wellenlänge $\bar{\lambda}$ hat die Welle in $\bar{\mathcal{S}}$? Bestimmen Sie anhand von $\bar{\omega}$ und $\bar{\mathcal{S}}$ die Geschwindigkeit der Wellen in $\bar{\mathcal{S}}$. Entspricht das Ergebnis Ihren Erwartungen?

$$\bar{\omega} = \omega \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}.$$

Das ist der Doppler-Effekt für Licht.

$$\bar{\lambda} = \frac{2\pi}{\bar{k}} = \frac{\lambda}{\alpha}.$$

Die Geschwindigkeit der Wellen in $\bar{\mathcal{S}}$ ist

$$\bar{v} = \frac{\bar{\omega}}{2\pi} \bar{\lambda} = c.$$

- (d) Wie groß ist das Intensitätsverhältnis zwischen $\mathcal{S}$ und $\bar{\mathcal{S}}$? Als Jugendlicher soll sich Einstein gefragt haben, wie eine elektromagnetische Well aussehen würde, wenn man mit Lichtgeschwindigkeit neben ihr her laufen könnte. Was könnten Sie ihm, für den Fall $v \rightarrow c$, über Amplitude, Frequenz und Intensität der Welle sagen?

Weil $I \sim E^2$, finden wir

$$\frac{\bar{I}}{I} = \frac{\bar{E}_0^2}{E_0^2} = \alpha^2 = \frac{1 - v/c}{1 + v/c}.$$