Übungsblatt # 1 zur Vorlesung
Klassische Theoretische Physik III
Lösungen zu den Übungen

Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theoretische Festkörperphysik

Dr. Giuseppe Toscano (giuseppe.toscano@kit.edu)

Prof. Dr. Carsten Rockstuhl (carsten.rockstuhl@kit.edu)

Übung 1 - Vektoranalysis (4 Punkte)

(a)

$$\begin{aligned}[\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})]_i &= \epsilon_{ijk}A_j[\mathbf{B}\times\mathbf{C}]_k \\ &= \epsilon_{ijk}A_j\epsilon_{klm}B_lC_m\end{aligned} \tag{1}$$

NR:

$$\begin{aligned}\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} &= \epsilon_{kij}\epsilon_{klm} \\ &= \delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &= A_jB_lC_m[\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}] \\ &= A_jB_iC_j - A_jB_jC_i \\ &= (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})B_i - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})C_i\end{aligned} \tag{3}$$

Daraus folgt:

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}$$

(b)

$$\begin{aligned}[\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})] &= A_i(\mathbf{B}\times\mathbf{C})_i \\ &= A_i\epsilon_{ijk}B_jC_k \\ &= \epsilon_{ijk}A_iB_jC_k \\ &= \epsilon_{jki}B_jC_kA_i \\ &= B_j\epsilon_{jki}C_kA_i \\ &= [\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})]\end{aligned} \tag{4}$$

bzw.

$$\begin{aligned}[\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})] &= A_i(\mathbf{B}\times\mathbf{C})_i \\ &= A_i\epsilon_{ijk}B_jC_k \\ &= \epsilon_{kij}C_kA_iB_j \\ &= C_k\epsilon_{kij}A_iB_j \\ &= [\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})]\end{aligned} \tag{5}$$

(c) zu zeigen ist also nach Umordnen $\mathbf{A}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B})+\mathbf{B}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})=\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})-(\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{B}-(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{A}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}) &= \mathbf{e}_i\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}A_j\partial_l B_m \\
&= \mathbf{e}_i\varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}A_j\partial_l B_m \\
&= \mathbf{e}_i(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})A_j\partial_l B_m \quad \text{(Eigenschaften } \varepsilon\text{-Tensor)} \\
&= \mathbf{e}_i(\delta_{il}A_j\partial_l B_j-\delta_{jl}A_j\partial_l B_i) \quad \text{(Summation über } m\text{)} \\
&= \mathbf{e}_i(A_j\partial_i B_j-A_j\partial_j B_i) \quad \text{(Summation über } l\text{)} \\
&= \boldsymbol{\nabla}(\mathbf{A}\cdot\check{\mathbf{B}})-(\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{B}\,.
\end{aligned}$$

Analog für $\mathbf{B}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})$, nur $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ vertauschen und dann addieren. Weiterhin gilt $\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=\boldsymbol{\nabla}(\check{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{B})+\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{A}\cdot\check{\mathbf{B}})=\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{B}\cdot\check{\mathbf{A}})+\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{A}\cdot\check{\mathbf{B}})$ und damit die Behauptung.

(d) Wir berechnen zunächst die Summanden der rechte Seite

$$\mathbf{B}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})=\sum_m B_m\left(\sum_{ij}\partial_i A_j\varepsilon_{mij}\right)=\sum_{mij}B_m\partial_i A_j\varepsilon_{mij}$$

$$\mathbf{A}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B})=\sum_{mij}A_m\partial_i B_j\varepsilon_{mij}=\sum_{mij}A_j\partial_i B_m\varepsilon_{jim}$$

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\boldsymbol{\nabla}\lambda=\sum_{mij}A_iB_j\varepsilon_{mij}\partial_m\lambda=\sum_{mij}A_jB_m\varepsilon_{ijm}\partial_i\lambda$$

Summation ergibt

$$\begin{aligned}
&=\sum_{mij}\lambda B_m\partial_i A_j\varepsilon_{mij}-\lambda A_j\partial_i B_m\varepsilon_{jim}+A_jB_m\varepsilon_{ijm}\partial_i\lambda \\
&=\sum_{mij}\varepsilon_{mij}\left(\lambda B_m\partial_i A_j+\lambda A_j\partial_i B_m+A_jB_m\partial_i\lambda\right) \\
&=\sum_{mij}\varepsilon_{mij}\left(\lambda\partial_i A_jB_m+A_jB_m\partial_i\lambda\right) \\
&=\sum_{mij}\varepsilon_{ijm}\partial_i\left(\lambda A_jB_m\right) \\
&=\sum_i\partial_i\left(\sum_{jm}\lambda A_jB_m\varepsilon_{ijm}\right) \\
&=\sum_i\partial_i\left(\lambda\mathbf{A}\times\mathbf{B}\right)_i \\
&=\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\lambda\mathbf{A}\times\mathbf{B}\right).
\end{aligned}$$