

Übungsblatt # 2 zur Vorlesung Klassische Theoretische Physik III Lösungen zu den Übungen

Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theoretische Festkörperphysik

Dr. Giuseppe Toscano (giuseppe.toscano@kit.edu)

Prof. Dr. Carsten Rockstuhl (carsten.rockstuhl@kit.edu)

Übung 1 - Vektoranalysis (2 + 2 + 2 = 6 Punkte)

(a)

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}_c) + \nabla \cdot (\mathbf{A}_c \times \mathbf{B}) \\ \text{Spatprodukt zyklisch} &= \mathbf{B}_c \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{A}_c) \\ &= 0 - \mathbf{A}_c \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}_c) + \nabla \times (\mathbf{A}_c \times \mathbf{B}) \\ &= \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}_c) - \mathbf{B}_c(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A}_c(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}_c) \\ &= \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}_c) - \mathbf{B} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{A}_c) \\ &= (\mathbf{B}_c \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A}_c \cdot \nabla) \mathbf{B} \\ &= (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int_K \nabla \cdot \mathbf{A} dx dy dz &= \int_K (a + b + c) dx dy dz = \frac{4}{3} \pi R^3 (a + b + c). \\ \int_{\partial K} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &= \int_{\partial K} A_r R^2 \sin \theta d\phi d\theta = \int_{\partial K} (A_x \sin \theta \cos \phi + A_y \sin \theta \sin \phi + A_z \cos \theta) R^2 \sin \theta d\phi d\theta \\ &= \int_{\partial K} (ax \sin \theta \cos \phi + by \sin \theta \sin \phi + cz \cos \theta) R^2 \sin \theta d\phi d\theta \\ &= \int_{\partial K} R (a \sin^2 \theta \cos^2 \phi + b \sin^2 \theta \sin^2 \phi + c \cos^2 \theta) R^2 \sin \theta d\phi d\theta \\ &= \frac{4}{3} \pi R^3 (a + b + c).\end{aligned}$$

Wobei $x = R \cos \phi \sin \theta$, $y = R \sin \phi \sin \theta$ und $z = R \cos \theta$.

(c) Es gilt $\nabla \times \mathbf{A} = (0, 0, 1)$, d.h.

$$\begin{aligned}\int_F \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &= \int_F 1 dx dy \\ &\stackrel{\text{ellipt. Koord.}}{=} \int_0^1 \int_0^{2\pi} 1 \cdot 3R \cdot 2R \rho d\phi d\rho \\ &= 6\pi R^2.\end{aligned}$$

die ellipt. Koordinaten lauten $x = 3R\rho \cos \phi$ und $y = 2R\rho \sin \phi$. Auf dem Rand ist $\rho = 1$, bzw. $d\rho = 0$, d.h. es gilt

$$\begin{aligned}\int_{\partial F} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} &= \int_{\partial F} \left(\frac{4}{3}x - 2y \right) dx + (3y - x) dy \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{4}{3} \cdot 3R \cos \phi - 2 \cdot 2R \sin \phi \right) (-3R \sin \phi) d\phi \\ &\quad + \int_0^{2\pi} (3 \cdot 2R \sin \phi - 3R \cos \phi) (2R \cos \phi) d\phi \\ &= 6\pi R^2.\end{aligned}$$

Übung 2 - Eigenschaften der δ -Distribution (6 Punkte)

(a) Beweis hat nur mit Integral Sinn, da δ darüber definiert. Partielle Integration liefert

$$\int dx g(x) \delta^{(n)}(x) = g(x) \delta^{(n-1)} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int dx g'(x) \delta^{(n-1)}(x) = - \int dx g'(x) \delta^{(n-1)}(x) \quad (1)$$

n -fache partielle Integration ergibt somit

$$\int dx g(x) \delta^{(n)}(x) = (-1)^n \int dx g^{(n)}(x) \delta(x) \Rightarrow \text{nur } x = 0 \text{ interessant.} \quad (2)$$

Mit $g(x) = x^n f(x)$ erhält man für n -mal differenzierbares $f(x)$ nach Produktregel

$$\frac{d^n x^n f(x)}{dx^n} \Big|_{x=0} = \frac{d^n x^n}{dx^n} f(x) \Big|_{x=0} + n \frac{d^{n-1} x^n}{dx^{n-1}} f'(x) \Big|_{x=0} + \dots = n! f(0) + 0 + \dots = n! f(0) \quad (3)$$

und damit die Behauptung.

(b) Die Beziehung

$$\delta[f(x)] = \sum_i \frac{1}{|f'(\lambda_i)|} \delta(x - \lambda_i) \quad \text{mit} \quad f'(\lambda_i) = \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=\lambda_i}$$

wobei λ_i die einfachen Nullstellen von $f(x)$ sind, folgt unter Verwendung des Ausdruckes für die Lorentz Kurven,

$$\delta[f(x)] = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\eta}{\eta^2 + f^2(x)} = 0 \quad \forall f(x) \neq 0$$

Andererseits gilt auch

$$\sum_n \frac{1}{|f'(x_n)|} \delta(x - x_n) = 0 \quad \forall x \neq x_n, \text{ d.h. für } f(x) = 0.$$

Jetzt noch die Flächeneigenschaft: dazu überdeckt man das Integrationsintervall so, dass in jedem Teilintervall gerade eine Nullstelle x_n von $f(x)$ liegt und benutzt die Taylorentwicklung um diese Nullstellen,

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta} \delta[f(x)] dx &= \sum_n^{\beta < x_n < \alpha} \int_{x_n - \varepsilon}^{x_n + \varepsilon} \delta[f(x)] dx = \sum_n^{\beta < x_n < \alpha} \int_{x_n - \varepsilon}^{x_n + \varepsilon} \delta \left[f(x) \frac{x - x_n}{x - x_n} \right] dx \\ &= \sum_n^{\beta < x_n < \alpha} \int_{x_n - \varepsilon}^{x_n + \varepsilon} dx \sum_n \delta[f'(x_n)(x - x_n)] = \dots\end{aligned}$$

Mit der Transformation $z = f'(x_n)x$ in jedem der Teilbereiche ergibt sich

$$\dots = \sum_n \frac{1}{|f'(x_n)|} = \int_{\alpha}^{\beta} dx \sum_n \frac{1}{|f'(x_n)|} \delta(x - x_n). \quad (4)$$

(c) Partielle Integration liefert

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \arctan x \delta'(x - 1) = \arctan(x) \delta(x - 1) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dx f'(x) \delta(x - 1) \quad (5)$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{1 + x^2} \delta(x - 1) \quad (6)$$

$$= -\frac{1}{2} \quad (7)$$

Mit Hilfe von 1.) (b) ergibt sich mit $f(x) = \cos x$ und $\lambda_i = i\pi + \pi/2$

$$|f'(\lambda_i)| = |\sin \lambda_i| = 1 \quad (8)$$

$$\Rightarrow \delta(\cos x) = \sum_i \delta\left(x - \frac{\pi}{2} - i\pi\right) \quad (9)$$

$$\int_1^\infty dx \frac{\delta(\cos x)}{x^2} = \int_1^\infty dx \frac{\sum_i \delta\left(x - \frac{\pi}{2} - i\pi\right)}{x^2} \quad (10)$$

$$= \int_1^\infty dx \frac{\sum_{i=0}^\infty \delta\left(x - \frac{\pi}{2} - i\pi\right)}{x^2} \quad (11)$$

$$= \sum_{i=0}^\infty \frac{1}{\left(i\pi + \frac{\pi}{2}\right)^2} \quad (12)$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \sum_{i=0}^\infty \frac{1}{(1+2i)^2} \quad (13)$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{2}. \quad (14)$$