

Übungsblatt # 3 zur Vorlesung Klassische Theoretische Physik III Lösungen zu den Übungen

Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theoretische Festkörperphysik

Dr. Giuseppe Toscano (giuseppe.toscano@kit.edu)

Prof. Dr. Carsten Rockstuhl (carsten.rockstuhl@kit.edu)

Übung 1 - Elektrostatik im Vakuum - Durchflutungsgesetz (3 Punkte)

Feld einer Punktladung (aus VL)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \quad (\curvearrow \text{ ist radialsymmetrisch}).$$

Zunächst Spezialfall $a = 0$:

$$\begin{aligned} \text{Fluss durch Kreisfläche} &= \int_{(V)} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} = \int_{(V)} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} df \quad (\curvearrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) \perp \mathbf{n}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Nun für $a \neq 0$ soll eine Kugel um q betrachtet werden. Sinnvollerweise wird der Radius gemäß $R^2 = r^2 + a^2$ gewählt. Die Kreisfläche schneidet nun eine Kugelkappe aus der Kugel. Da $a \neq 0$ befindet sich die Punktladung also außerhalb des Volumens V der Kugelkappe, somit folgt nach dem Gaußschen Gesetz

$$\int_{(V)} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} = \frac{Q_V}{\epsilon_0} = 0$$

Das bedeutet, dass der Fluss durch die Kreisfläche vom Fluss durch die Kugelkappe aufgehoben wird. Somit kann der Fluss durch die Kreisfläche auch als Fluss durch die Kugelkappe berechnet werden (was rein fließt muss auch wieder raus fließen):

$$\begin{aligned} \text{Fluss durch Kreisfläche} &= \int_{(V)} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} = \int_{(V)} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} df \quad (\curvearrow \text{Kugelsymmetrie}) \\ &= \int_{(V)} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r df = \int_{(Kugelsegment)} d\vartheta d\varphi \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} R^2 \sin \vartheta \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_{\text{Öffnung}}} d\vartheta d\varphi \sin \vartheta = \frac{2\pi q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\theta_{\text{Öffnung}}} d\vartheta \sin \vartheta \\ &= -\frac{q}{2\epsilon_0} \cos \vartheta \Big|_0^{\theta_{\text{Öffnung}}} = \frac{q}{2\epsilon_0} \left(1 - \cos \theta_{\text{Öffnung}}\right) \\ &\downarrow \cos \theta_{\text{Öffnung}} = \frac{a}{R} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}} \\ &= \frac{q}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}}\right) \end{aligned}$$

Übung 2 - Elektrostatik im Vakuum - Poisson-Gleichung (4 Punkte)

Poisson-Gleichung

$$\begin{aligned}
 \Delta \phi(\mathbf{r}) &= -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \\
 \downarrow \quad \text{Symmetrie: } \phi(\mathbf{r}) &= \phi(r) \quad \curvearrowright \quad \text{Kugelkoordinaten: } \Delta = \Delta_r + \Delta_\Omega = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r) + \Delta_\Omega \\
 \Delta \phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \phi(\mathbf{r})) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \partial_r \left(r^2 \partial_r \left[\frac{1}{r} \exp\left\{-\frac{2r}{a}\right\} + \frac{1}{a} \exp\left\{-\frac{2r}{a}\right\} \right] \right) \\
 &= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \partial_r \left(-1 \cdot \exp\left\{-\frac{2r}{a}\right\} - \frac{2r}{a} \exp\left\{-\frac{2r}{a}\right\} - \frac{2r^2}{a^2} \exp\left\{-\frac{2r}{a}\right\} \right) \\
 &= -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \partial_r \left[\left(1 + \frac{2r}{a} + \frac{2r^2}{a^2} \right) \exp\left\{-\frac{2r}{a}\right\} \right] \\
 &= -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \left(\left(\frac{2}{a} + \frac{4r}{a^2} - \frac{2}{a} - \frac{4r}{a^2} - \frac{4r^2}{a^3} \right) \exp\left\{-\frac{2r}{a}\right\} \right) = \frac{e}{a^3\pi\varepsilon_0} \left(\exp\left\{-\frac{2r}{a}\right\} \right)
 \end{aligned}$$

Nun die Singularität von $\phi(\mathbf{r})$ bei $r = 0$ mit dem Durchflutungsgesetz

$$\begin{aligned}
 Q_V &= \int_V \rho(\mathbf{r}) dV \quad \left(\curvearrowright \Delta \phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \right) \\
 &= -\varepsilon_0 \int_V \Delta \phi(\mathbf{r}) dV \\
 \int_V dV \Delta \phi(\mathbf{r}) &= \int_V dV \nabla \cdot (\nabla \phi(\mathbf{r})) = \int_{(V)} d\mathbf{f} \cdot (\nabla \phi(\mathbf{r})) \quad (\curvearrowright \nabla f(r) = f'(r) \mathbf{e}_r \text{ anwenden}) \\
 &= \int_{(V)} d\mathbf{f} \cdot (\partial_r \phi(\mathbf{r}) \mathbf{e}_r) \quad (\curvearrowright \text{Kugelkoordinaten wegen Symmetrie}) \\
 &= \int_{(V)} d\vartheta d\varphi r^2 \sin \vartheta \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r (\partial_r \phi(\mathbf{r})) \quad (\curvearrowright r^2 \partial_r \phi(\mathbf{r}) \text{ von oben}) \\
 &= -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \left(1 + \frac{2r}{a} + \frac{2r^2}{a^2} \right) \exp\left\{-\frac{2r}{a}\right\} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi d\vartheta d\varphi \sin \vartheta \\
 &= -\frac{e}{\varepsilon_0} \left(1 + \frac{2r}{a} + \frac{2r^2}{a^2} \right) \exp\left\{-\frac{2r}{a}\right\} \\
 Q_V &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_V \rho(\mathbf{r}) dV = -\varepsilon_0 \lim_{r \rightarrow 0} \int_V \Delta \phi(\mathbf{r}) dV = +e
 \end{aligned}$$

FÄEr die zugehörige Ladungsdichte also eine δ -Distribution bei $r = 0$ in Kugelkoordinaten

$$\rho(\mathbf{r}) = e \frac{\delta(r)}{4\pi r^2}$$

Somit zusammen

$$\rho(\mathbf{r}) = e \frac{\delta(r)}{4\pi r^2} - \frac{e}{a^3\pi} \left(\exp\left\{-\frac{2r}{a}\right\} \right)$$

Hier sind ein diskreter und ein kontinuierlicher Term zu erkennen. Der diskrete Term entspricht dem ruhenden Atomkern des Wasserstoffatoms und der kontinuierliche der Ladungsdichte des Elektrons im Grundzustand.

Übung 3 - Elektrostatik im Vakuum - Gaußsches Gesetz (5 Punkte)

Im Folgenden soll die große Kugel durch den Index g und die kleine durch k markiert werden. Durch das Superpositionsprinzip können sowohl Ladungsdichte als auch elektrisches Feld in Anteile der beiden Kugeln zerlegt werden:

$$\begin{aligned}
 \rho(\mathbf{r}) &= \rho_g(\mathbf{r}) + \rho_k(\mathbf{r}) \\
 \rho_g(\mathbf{r}) &= \rho_0 \Leftrightarrow \mathbf{r} \in K_g, \text{ sonst } 0 \\
 \rho_k(\mathbf{r}) &= -\rho_0 \Leftrightarrow \mathbf{r} \in K_k, \text{ sonst } 0 \\
 \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \mathbf{E}_g(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_k(\mathbf{r})
 \end{aligned}$$

Nun: Feld von g in A, wegen der Symmetrie $\mathbf{E}_g(\mathbf{r}) = E_g(r) \mathbf{e}_r$, Gaußsches Gesetz

$$\begin{aligned}
\int_{(V)} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V dV' \rho(r') \\
\text{LHS} &= \int_{(V)} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} = \int_{(V)} \mathbf{E}_g(r) \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n} df = \mathbf{E}_g(R) \int_{(V)} df = \mathbf{E}_g(R) 4\pi R^2 \\
\text{RHS} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V dV' \rho(r') = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{K_g} dV' \rho_0 = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \int_{K_g} dV' = \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \\
\mathbf{E}_g(\mathbf{r})|_A &= \frac{R\rho_0}{3\varepsilon_0} (\mathbf{e}_r)|_A
\end{aligned}$$

Feld von k in A, wegen der Symmetrie $\mathbf{E}_k(\mathbf{r}) = E_k(r) \mathbf{e}_r$, Gaußsches Gesetz

$$\begin{aligned}
\int_{(V)} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V dV' \rho(r') \\
\text{LHS} &= \int_{(V)} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} = \int_{(V)} \mathbf{E}_k(r) \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n} df = \mathbf{E}_k\left(\frac{R}{2}\right) \int_{(V)} df = \mathbf{E}_k\left(\frac{R}{2}\right) 4\pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 \\
\text{RHS} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V dV' \rho(r') = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{K_k} dV' (-\rho_0) = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \int_{K_k} dV' = -\frac{4}{3} \pi \left(\frac{R}{2}\right)^3 \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \\
\mathbf{E}_k(\mathbf{r})|_A &= -\frac{R\rho_0}{3 \cdot 2\varepsilon_0} \mathbf{e}_r = -\frac{R\rho_0}{6\varepsilon_0} \mathbf{e}_r \curvearrowright \mathbf{E}(\mathbf{r})|_A = \frac{R\rho_0}{6\varepsilon_0} (\mathbf{e}_r)|_A
\end{aligned}$$

Nun: Feld in B, aus VL $\mathbf{E}_g(\mathbf{r}) = 0$ und wieder k isoliert betrachtet: A und B ununterscheidbar $\curvearrowright$
 $\mathbf{E}(\mathbf{r})|_B = -\frac{R\rho_0}{6\varepsilon_0} (\mathbf{e}_r)|_B = \frac{R\rho_0}{6\varepsilon_0} (\mathbf{e}_r)|_A$

Nun: Feld in C, g isoliert betrachtet: A und C ununterscheidbar $\curvearrowright$ $\mathbf{E}_g(\mathbf{r})|_C = \frac{R\rho_0}{3\varepsilon_0} (\mathbf{e}_r)|_C$, wegen der Symmetrie $\mathbf{E}_k(\mathbf{r}) = E_k(r) \mathbf{e}_r$, Gaußsches Gesetz

$$\begin{aligned}
\int_{(V)} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V dV' \rho(r') \\
\text{LHS} &= \int_{(V)} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} = \int_{(V)} \mathbf{E}_k(r) \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n} df = \mathbf{E}_k\left(\frac{3R}{2}\right) \int_{(V)} df = \mathbf{E}_k\left(\frac{3R}{2}\right) 4\pi \left(\frac{3R}{2}\right)^2 \\
\text{RHS} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V dV' \rho(r') = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{K_k} dV' (-\rho_0) = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \int_{K_k} dV' = -\frac{4}{3} \pi \left(\frac{R}{2}\right)^3 \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \\
\mathbf{E}_k(\mathbf{r})|_C &= -\frac{R\rho_0 2^2}{3 \cdot 3^2 \cdot 2^3 \varepsilon_0} \mathbf{e}_r = -\frac{R\rho_0}{3^3 \cdot 2\varepsilon_0} \mathbf{e}_r = -\frac{R\rho_0}{54\varepsilon_0} \mathbf{e}_r \\
\mathbf{E}(\mathbf{r})|_C &= \frac{R\rho_0}{3\varepsilon_0} (\mathbf{e}_r)|_C - \frac{R\rho_0}{54\varepsilon_0} (\mathbf{e}_r)|_C = \frac{17R\rho_0}{54\varepsilon_0} (\mathbf{e}_r)|_C = -\frac{17R\rho_0}{54\varepsilon_0} (\mathbf{e}_r)|_A
\end{aligned}$$

Nun: Feld in D, aus VL $\mathbf{E}_k(\mathbf{r}) = 0$ und Feld von g in D, wegen der Symmetrie $\mathbf{E}_g(\mathbf{r}) = E_g(r) \mathbf{e}_r$, Gaußsches Gesetz

$$\begin{aligned}
\int_{(V)} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V dV' \rho(r') \\
\text{LHS} &= \int_{(V)} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} = \int_{(V)} \mathbf{E}_g(r) \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n} df = \mathbf{E}_g\left(\frac{R}{2}\right) \int_{(V)} df = \mathbf{E}_g\left(\frac{R}{2}\right) 4\pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 \\
\text{RHS} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V dV' \rho(r') = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{K_g, r \leq \frac{R}{2}} dV' \rho_0 = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \int_{K_g, r \leq \frac{R}{2}} dV' = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{R}{2}\right)^3 \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \\
\mathbf{E}_g(\mathbf{r})|_D &= \frac{R\rho_0}{3 \cdot 2\varepsilon_0} \mathbf{e}_r = \frac{R\rho_0}{6\varepsilon_0} (\mathbf{e}_r)|_D = \frac{R\rho_0}{6\varepsilon_0} (\mathbf{e}_r)|_A
\end{aligned}$$