

Übungsblatt # 4 zur Vorlesung Klassische Theoretische Physik III Lösungen zu den Übungen

Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theoretische Festkörperphysik

Dr. Giuseppe Toscano (giuseppe.toscano@kit.edu)

Prof. Dr. Carsten Rockstuhl (carsten.rockstuhl@kit.edu)

Übung 1 - Elektrostatisches Potential (4 Punkte)

$$\nabla^2 = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^\infty dr' \int_0^\pi d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' r'^2 \sin(\theta') \frac{L}{r'} (1 - e^{-\alpha r'}) \Theta(R - r') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{2\pi}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^R dr' L r' (1 - e^{-\alpha r'}) \int_{-1}^1 d(\cos \theta') \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta'}} \\ &= \frac{2\pi}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^R dr' L r' (1 - e^{-\alpha r'}) \frac{1}{rr'} \left[\sqrt{(r + r')^2} - \sqrt{(r - r')^2} \right] \\ &= \frac{L}{\varepsilon_0} \int_0^R dr' (1 - e^{-\alpha r'}) \begin{cases} \frac{r'}{r}, & \text{für } r > r' \\ 1, & \text{für } r < r'. \end{cases} \end{aligned}$$

Die Unterscheidung der beiden Fälle ist nur fürs Potential innerhalb der Ladungsverteilung ($r < R$) notwendig. Dort bekommt man also

$$\begin{aligned} \phi^i(\mathbf{r}) &= \frac{L}{\varepsilon_0} \left[\int_0^r dr' \frac{r'}{r} (1 - e^{-\alpha r'}) + \int_r^R dr' (1 - e^{-\alpha r'}) \right] \\ &= \frac{L}{\varepsilon_0} \left[-\frac{r}{2} + \frac{1}{\alpha^2 r} (e^{-\alpha r} - 1) + R + \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha R} \right] \end{aligned}$$

Fürs Potential außerhalb ($r > R$) ergibt sich

$$\begin{aligned} \phi^a(\mathbf{r}) &= \int_0^R dr' \frac{r'}{r} (1 - e^{-\alpha r'}) \\ &= \frac{L}{\varepsilon_0} \frac{1}{r} \left[\frac{R^2}{2} + \frac{1}{\alpha^2} (e^{-\alpha R} - 1) + \frac{R}{\alpha} e^{-\alpha R} \right] \end{aligned}$$

Da die gesamte eckige Klammer konstant ist, erkennt man sofort das richtige Verhalten, nämlich Abfall wie $1/r$ entsprechend einer Punktladung. Wie man außerdem leicht prüfen kann gilt $\phi(0) = \text{Konstante}$, $\phi(\infty) = 0$, $\phi^i(R) = \phi^a(R)$.

Das elektrische Feld ergibt sich aus dem Potential durch negative Gradientenbildung. Nur die radiale Komponente ist ungleich Null:

$$E_r^i = -\frac{\partial}{\partial r} \phi^i(r) = \frac{L}{\varepsilon_0} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha^2 r^2} (e^{-\alpha r} - 1) + \frac{1}{\alpha r} e^{-\alpha r} \right]$$

$$E_r^a = -\frac{\partial}{\partial r} \phi^a(r) = \frac{L}{\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \left[\frac{R^2}{2} + \frac{1}{\alpha^2} (e^{-\alpha R} - 1) + \frac{R}{\alpha} e^{-\alpha R} \right]$$

Man kann wieder prüfen, dass gilt $E_r(0) = 0$, $E_r(\infty) = 0$, $E_r^i(R) = E_r^a(R)$.

Übung 2 - Elektrisches Dipolmoment (4 Punkte)

Ladungsdichte aus Skript:

$$\rho_D(\mathbf{r}) = -\mathbf{p} \cdot \text{grad}_{\mathbf{r}} \delta(\mathbf{r})$$

Einsetzen in Poissonsches Integral:

$$\phi_D(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V dV' \frac{\rho_D(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V dV' \frac{\mathbf{p} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \delta(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Nebenrechnung:

$$\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \left[\frac{\mathbf{p} \delta(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{p} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \delta(\mathbf{r}') + \delta(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \left[\frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right]$$

Oben einsetzen liefert:

$$\begin{aligned} \phi_D(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\underbrace{\int_V dV' \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \left[\frac{\mathbf{p} \delta(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right]}_{\text{Gauss verwenden}} - \int_V dV' \delta(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \left[\frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \right] \\ \phi_D(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\underbrace{\int_{\partial V} \left[\frac{\mathbf{p} \delta(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \cdot d\mathbf{F}'}_{=0} - \int_V dV' \delta(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \left[\frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \right] = \dots \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V dV' \delta(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \left[\frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \quad \text{man nutze} \quad \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \left[\frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] = -\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \left[\frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \end{aligned}$$

und erhält:

$$\phi_D(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \mathbf{p} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \int_V dV' \frac{\delta(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \mathbf{p} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{r}$$

Übung 3 - Elektrischer Quadrupolmomententensor (3 Punkte)

Ladungsdichte:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}) &= q\delta(x)\delta(z) [\delta(y-d) + \delta(y+d)] + q\delta(x)\delta(y) [\delta(z-d) + \delta(z+d)] - \\ &\quad - q\delta(y)\delta(z) [\delta(x+d) + \delta(x+d/2) + \delta(x-d) + \delta(x-2d)] \end{aligned}$$

Dipolmoment

$$\mathbf{p} = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} = -qd \frac{3}{2} \mathbf{e}_x.$$

Quadrupoltensor

$$\begin{aligned} Q_{ij} &= \int d^3r \rho(\mathbf{r}) (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}), \\ Q_{ij} &= 0 \quad \forall i \neq j. \end{aligned}$$

$$Q_{xx} = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) (2x^2 - y^2 - z^2) = -\frac{33}{2} qd^2.$$

$$Q_{yy} = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) (2y^2 - x^2 - z^2) = \frac{33}{4} qd^2 = -\frac{1}{2} Q_{xx},$$

$$Q_{zz} = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) (2z^2 - x^2 - y^2) = \frac{33}{4} qd^2 = Q_{yy}.$$

Daraus folgt:

$$Q_{zz} = Q_{yy} = -\frac{1}{2} Q_{xx}.$$

Spurfreiheit! Axialsymmetrie!