Übungsblatt # 5 zur Vorlesung
Klassische Theoretische Physik III
Lösungen zu den Übungen

Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theoretische Festkörperphysik

Dr. Giuseppe Toscano (giuseppe.toscano@kit.edu)

Prof. Dr. Carsten Rockstuhl (carsten.rockstuhl@kit.edu)

Übung 1 - Elektrischer Quadrupolmomenttensor (5 Punkte)

Axiale Symmetrie um die z-Achse $\rightarrow$ Kugelkoordinaten, Ansatz für Ladungsdichte

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho(r, \vartheta) \quad \& \quad \partial_\varphi \rho(\mathbf{r}) = 0$$

Das Quadrupolmoment kann allgemein als symmetrisch und spurfrei angenommen werden.

$$\begin{aligned}
D_{ij} &= \int_V dV' \rho(\mathbf{r}') \left(3x_i' x_j' - r'^2 \delta_{ij}\right) \\
D_{xy} &= D_{yx} = \int_V dV' \rho(\mathbf{r}') (3x'y') = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} dr d\vartheta d\varphi r^2 \sin\vartheta \rho(r, \vartheta) \left(3r^2 \sin^2\vartheta \sin\varphi \cos\varphi\right) \\
&\downarrow \int_0^{2\pi} d\varphi \sin\varphi \cos\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\partial_\varphi \frac{1}{2} \sin^2\varphi\right) = \frac{1}{2} \sin^2\varphi \Big|_0^{2\pi} = 0 \\
&= 0 \\
D_{xz} &= D_{zx} = \int_V dV' \rho(\mathbf{r}') (3x'z') = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} dr d\vartheta d\varphi r^2 \sin\vartheta \rho(r, \vartheta) \left(3r^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \cos\varphi\right) \\
&\downarrow \int_0^{2\pi} d\varphi \cos\varphi = 0 \\
&= 0 \\
D_{yz} &= D_{zy} = \int_V dV' \rho(\mathbf{r}') (3y'z') = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} dr d\vartheta d\varphi r^2 \sin\vartheta \rho(r, \vartheta) \left(3r^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \sin\varphi\right) \\
&\downarrow \int_0^{2\pi} d\varphi \sin\varphi = 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

somit ist D_{ij} diagonal. Außerdem

$$
\begin{aligned}
D_{xx} &= \int_V dV' \rho\left(\mathbf{r}'\right)\left(3x'^2 - r'^2\right) = \int_V dV' \rho\left(\mathbf{r}'\right)\left(2x'^2 - y'^2 - z'^2\right) \\
D_{yy} &= \int_V dV' \rho\left(\mathbf{r}'\right)\left(3y'^2 - r'^2\right) = \int_V dV' \rho\left(\mathbf{r}'\right)\left(2y'^2 - x'^2 - z'^2\right) \\
D_{xx} - D_{yy} &= \int_V dV' \rho\left(\mathbf{r}'\right)\left(2x'^2 - y'^2 - z'^2 - 2y'^2 + x'^2 + z'^2\right) = \int_V dV' \rho\left(\mathbf{r}'\right)\left(3x'^2 - 3y'^2\right) \\
&= 3\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} dr d\vartheta d\varphi r^2 \sin\vartheta \rho\left(r,\vartheta\right)\left(r^2\sin^2\vartheta\cos^2\varphi - r^2\sin^2\vartheta\sin^2\varphi\right) \\
&\downarrow \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi \curvearrowright \int_0^{2\pi} d\varphi \cos 2\varphi = \frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{2\pi} = 0 \\
&= 0 \curvearrowright D_{xx} = D_{yy} \\
D_{zz} &= -\left(D_{xx} + D_{yy}\right) \curvearrowright \text{ sei } D_{zz} = D_0,\, D_{xx} = D_{yy} = -\frac{1}{2}D_0
\end{aligned}
$$

nur noch eine Unabhängige. Wie schon in der VL:

$$
\begin{aligned}
\phi_{\text{Quadrupol}}\left(\mathbf{r}\right) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2}\frac{D_{ij}x_ix_j}{r^5} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2}\sum_{ij}\frac{D_{ij}x_ix_j}{r^5} \qquad (\curvearrowright \text{diagonal}) \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\frac{D_{ii}x_i^2}{r^5} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2}\frac{\left(D_{xx}x^2 + D_{yy}y^2 + D_{zz}z^2\right)}{r^5} \qquad (\curvearrowright D_0) \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2}\frac{\left(-\frac{1}{2}D_0x^2 - \frac{1}{2}D_0y^2 + D_0z^2\right)}{r^5} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{D_0}{r^5}\left(z^2 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2\right) \\
&= \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{D_0}{r^5}\left(r^2\cos^2\vartheta - \frac{1}{2}r^2\sin^2\vartheta\cos^2\varphi - \frac{1}{2}r^2\sin^2\vartheta\sin^2\varphi\right) \\
&= \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{D_0}{r^5}\left(r^2\cos^2\vartheta - \frac{1}{2}r^2\sin^2\vartheta\right) = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{D_0}{r^3}\left(\cos^2\vartheta - \frac{1}{2}\sin^2\vartheta\right) \\
&= -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{D_0}{2r^3}\left(1 - 3\cos^2\vartheta\right) = -\frac{D_0}{16\pi\varepsilon_0}\frac{1 - 3\cos^2\vartheta}{r^3}
\end{aligned}
$$

und daraus das Feld

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\text{Quadrupol}}\left(\mathbf{r}\right) &= -\nabla\phi_{\text{Quadrupol}}\left(\mathbf{r}\right) \qquad \left(\curvearrowright \nabla = \mathbf{e}_r\partial_r + \mathbf{e}_\vartheta\frac{1}{r}\partial_\vartheta + \mathbf{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi\right) \\
&= -\left(\mathbf{e}_r\partial_r + \mathbf{e}_\vartheta\frac{1}{r}\partial_\vartheta + \mathbf{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi\right)\left(-\frac{D_0}{16\pi\varepsilon_0}\frac{1 - 3\cos^2\vartheta}{r^3}\right) \\
&= \frac{D_0}{16\pi\varepsilon_0}\left[\mathbf{e}_r\partial_r\left(\frac{1 - 3\cos^2\vartheta}{r^3}\right) + \mathbf{e}_\vartheta\frac{1}{r}\partial_\vartheta\left(\frac{1 - 3\cos^2\vartheta}{r^3}\right)\right] \\
&= \frac{D_0}{16\pi\varepsilon_0}\left[\mathbf{e}_r\left(-3\frac{1 - 3\cos^2\vartheta}{r^4}\right) + \mathbf{e}_\vartheta\frac{3}{r^4}\partial_\vartheta\left(-\cos^2\vartheta\right)\right] \\
&= \frac{D_0}{16\pi\varepsilon_0}\left[\mathbf{e}_r\left(-3\frac{1 - 3\cos^2\vartheta}{r^4}\right) + \mathbf{e}_\vartheta\frac{3}{r^4}\left(2\cos\vartheta\sin\vartheta\right)\right] \\
&= \frac{D_0}{16\pi\varepsilon_0}\left[\mathbf{e}_r\left(-3\frac{1 - 3\cos^2\vartheta}{r^4}\right) + \mathbf{e}_\vartheta\frac{3}{r^4}\sin 2\vartheta\right] \\
&= -\frac{3D_0}{16\pi\varepsilon_0 r^4}\left[\left(1 - 3\cos^2\vartheta\right)\mathbf{e}_r - \sin 2\vartheta\mathbf{e}_\vartheta\right]
\end{aligned}
$$

Übung 2 - Feldenergie im Kugelkondensator (3 Punkte)

Ladungsdichte

$$
\rho(r) = \frac{Q_1}{4\pi R_1^2}\delta\left(r - R_1\right) + \frac{Q_2}{4\pi R_2^2}\delta\left(r - R_2\right)
$$

Kugelsymmetrische Ladungsverteilung $\Rightarrow$

$$
\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r)\mathbf{e_r} \quad \rightarrow \quad \oint_{\partial V_r}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{f} = 4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V d\mathbf{r}\rho(r)
$$

Feld im Kondensator

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{e_r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\begin{cases}0, & r < R_1\\ Q_1, & R_1 \le r < R_2\\ Q_1 + Q_2 & R_2 \le r\end{cases}$$

Energiedichte:

$$w(\mathbf{r}) = \frac{\varepsilon_0}{2}|E^2| = \frac{1}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4}\begin{cases}0, & r < R_1\\ Q_1^2, & R_1 \le r < R_2\\ (Q_1 + Q_2)^2 & R_2 \le r\end{cases} \tag{1}$$

Gesamtenergie

$$\begin{aligned}W = \int d^3 r W(\mathbf{r}) &= \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\left[Q_1^2 \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} + (Q_1+Q_2)^2 \int_{R_2}^{\infty} \frac{dr}{r^2}\right]\\ &= \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\left[Q_1^2\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + (Q_1+Q_2)^2 \frac{1}{R_2}\right]\end{aligned}$$

(a) Fall $Q_1 = Q$, $Q_2 = -Q$:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\begin{cases}0, & r < R_1\\ Q, & R_1 \le r < R_2\\ 0 & R_2 \le r\end{cases}$$

$$w = \frac{1}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4}\begin{cases}0, & r < R_1\\ Q^2, & R_1 \le r < R_2\\ 0 & R_2 \le r\end{cases}$$

$$W = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{R_2 - R_1}{R_2 R_1}$$

(b) Fall $Q_1 = Q$, $Q_2 = -Q/2$:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\begin{cases}0, & r < R_1\\ Q, & R_1 \le r < R_2\\ \frac{Q}{2} & R_2 \le r\end{cases}$$

$$w = \frac{1}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4}\begin{cases}0, & r < R_1\\ Q^2, & R_1 \le r < R_2\\ \frac{Q^2}{4} & R_2 \le r\end{cases}$$

$$W = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{R_2 - R_1}{R_2 R_1} + \frac{1}{4R_2}\right)$$

(c) Fall $Q_1 = -Q/2$, $Q_2 = Q$:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\begin{cases}0, & r < R_1\\ \frac{-Q}{2}, & R_1 \le r < R_2\\ \frac{+Q}{2} & R_2 \le r\end{cases}$$

$$w = \frac{1}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4}\begin{cases}0, & r < R_1\\ \frac{Q^2}{4}, & R_1 \le r < R_2\\ \frac{Q^2}{4} & R_2 \le r\end{cases}$$

$$W = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{R_2 - R_1}{4R_2 R_1} + \frac{1}{4R_2}\right)$$

Berechnung des Drucks auf die "Kondensatorplatten":

$$\mathbf{p}_1 = \frac{d\mathbf{F}_1}{dA} = \frac{Q_1}{4\pi R_1^2}\mathbf{E}(r = R_1) = \frac{Q_1^2}{16\pi^2\varepsilon_0 R_1^4}\mathbf{e_r}$$

$$\mathbf{p}_2 = \frac{d\mathbf{F}_2}{dA} = \frac{Q_2}{4\pi R_2^2}\mathbf{E}(r = R_2) = -\frac{|Q_1 Q_2|}{16\pi^2\varepsilon_0 R_2^4}\mathbf{e_r}$$

(a) Fall $Q_1 = Q$, $Q_2 = -Q$:

$$p_{1,2} = \frac{Q^2}{16\pi^2\varepsilon_0 R_{1,2}^4}$$

(b) Fall $Q_1 = Q$, $Q_2 = -Q/2$:

$$p_1 = \frac{Q^2}{16\pi^2\varepsilon_0 R_1^4}; \qquad p_2 = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R_2^4}$$

(c) Fall $Q_1 = -Q/2$, $Q_2 = Q$:

$$p_1 = \frac{Q^2}{64\pi^2\varepsilon_0 R_1^4}; \qquad p_2 = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R_2^4}$$

Übung 3 - Potentielle Energie und elektrische Kraft (4 Punkte)

Der Index q bezeichne im folgenden die Großen, die zur Punktladung gehören, der Index d diejenigen zum Punktdipol. Das Potential der Punktladung am Ort $\mathbf{r}_q$ und das eines Punktdipoles am Ort $\mathbf{r}_d$ sind

$$\phi_q(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_q|}, \quad \phi_d(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{d}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_d)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_d|^3}.$$

Die jeweils erzeugten elektrischen Felder sind

$$\mathbf{E}_q(\mathbf{r}) = -\nabla\phi_q(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_q}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_q|^3}$$

$$\mathbf{E}_d(\mathbf{r}) = -\nabla\phi_d(\mathbf{r}) = \frac{3\mathbf{d}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_d)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_d) - (\mathbf{r}-\mathbf{r}_d)^2\mathbf{d}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_q|^5}$$

Die potentielle Energie der Punktladung q im Felde des Dipoles $\mathbf{d}$ ist gegeben durch

$$W_q(\mathbf{r}) = q\phi_d(\mathbf{r})$$

die potentielle Energie des Dipoles im Feld der Punktladung ist

$$W_d(\mathbf{r}) = -\mathbf{d}\cdot\mathbf{E}_q(\mathbf{r}) = \mathbf{d}\cdot\nabla\phi_q(\mathbf{r})$$

Die potentielle Energie der Anordnung ist daher

$$W = W_q(\mathbf{r}_q) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{d}\cdot(\mathbf{r}_d-\mathbf{r}_q)}{|\mathbf{r}_d-\mathbf{r}_q|^3} = W_d(\mathbf{r}_d)$$

Die Kräfte folgen dirch Gradientenbildung aus der potentiellen Energie. Die Kraft auf die Punktladung (am Ort $\mathbf{r}$) ist

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_q(\mathbf{r}) &= -\nabla W_q(\mathbf{r}) = -q\nabla\phi_d(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}_d(\mathbf{r})\\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\mathbf{d}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_d)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_d) - (\mathbf{r}-\mathbf{r}_d)^2\mathbf{d}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_d|^5}\end{aligned}$$

Die Kraft auf den Dipol (am Ort $\mathbf{r}$) ist

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_d(\mathbf{r}) &= -\nabla W_d(\mathbf{r})\\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\mathbf{d}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_q)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_q) - (\mathbf{r}-\mathbf{r}_q)^2\mathbf{d}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_q|^5}\end{aligned}$$

Wie wegens drittem Newtonschen Axiom zu erwarten ist der Betrag der Kräfte gleich und nur das Vorzeichen der Richtung ändert sich. Um die Formeln zu vereinfachen, kann man sich den jeweiligen anderen Partner (Punktladung oder Dipol) in den Ursprung setzen.