Übungsblatt # 6 zur Vorlesung Klassische Theoretische Physik III

Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theoretische Festkörperphysik

Dr. Giuseppe Toscano (giuseppe.toscano@kit.edu)

Prof. Dr. Carsten Rockstuhl (carsten.rockstuhl@kit.edu)

Übung 1 - Spiegelladungsmethode an metallischen Ebenen (4 Punkte)

(a) Das Volumen $V = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0\}$ ist bei $x = 0$ und $y = 0$ durch perfekte metallische Leiter begrenzt. Finden Sie die Greensche Funktion $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ mit $\mathbf{r}', \mathbf{r} \in V$, wobei $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ über $\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')/\varepsilon_0$ definiert ist.

(b) Bestimmen Sie ferner das Potential $\Phi(\mathbf{r})$ bei Anwesenheit einer Punktladung q bei $\mathbf{r}_0$.

(c) Berechnen Sie die Flächenladungsdichte η.

(d) Ermitteln Sie die Gesamtladung auf den Platten. (geht auch ohne Integration über die Flächenladungsdichte.) *Hinweis*: Gaußcher Satz und Übergangsbedingungen für das $\mathbf{E}$-Feld bei Metallen.

(e) Welche Kraft wirkt auf die Punktladung (geht auch ohne Integration über die Flächenladungsdichte).

Übung 2 - Randwertproblem mit leitender Kugel (4 Punkte)

(a) Berechnen Sie mit der aus der Vorlesung bekannten Greenschen Funktion das elektrostatische Potential $\rho(\mathbf{r})$ endlicher Ausdehnung außerhalb einer im Ursprung befindlichen leitenden, geerdeten Kugel vom Radius R. Drücken Sie das Ergebnis in Abhängigkeit von $\phi_\rho(\mathbf{r})$ aus, wobei $\phi_\rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3r'$ das Potential von ρ im ansonsten leeren Raum $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Spezialisieren Sie nun die Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ auf den Fall, dass die Ladungsverteilung die eines an der Stelle $\mathbf{a}$ befindlichen Dipols $\mathbf{p}$ ist. Zeigen Sie, dass der Dipol für den Fall $\mathbf{p} \cdot \mathbf{a} \neq 0$ auf der Kugeloberfläche eine (nicht im Detail zu berechnende) Flächenladungsdichte mit nichtverschwindender Gesamtladung Q_{ind} induziert (Q_{ind} ist explizit zu bestimmen).

(c) Machen Sie sich auf einem alternativen Weg Q_{ind} plausibel, indem Sie einen parallel zu $\mathbf{a}$ orientierten Dipol als Limes zweier Punktladungen erzeugen und Q_{ind} über die beiden entsprechenden Spiegelladungen bestimmen (und damit das Resultat aus b) in diesem Spezialfall reproduzieren). Wieso verschwindet Q_{ind} im Grenzfall $R \to \infty$, in dem aus der leitenden Kugel eine leitende Halbebene wird?

(d) Berechnen Sie nun (im Fall $\mathbf{p} \cdot \mathbf{a} \neq 0$) die auf den Dipol wirkende Kraft $\mathbf{K}$ für größe Abstände $a \gg R$ von der Kugel in führender Ordnung von $1/a$ (mit $a \equiv |\mathbf{a}|$). Mit welcher Potenz von $1/a$ geht diese Kraft gegen Null und wie vergleicht sich dieser Exponent mit dem derjenigen Kraft, welche von der Leiterkugel auf eine Punktladung ausgeübt wird?

Übung 3 - Greensche Funktion als Reihe (4 Punkte)

(a) Eine weitere Methode, die Greensche Funktion für ein Volumen V mit dem Rand ∂V zu bestimmen, ist, sie als Summe der Eigenfunktionen $\Psi_n(\mathbf{r})$ des Δ-Operators mit verschwindenden Randbedingungen darzustellen. Die $\Psi_n(\mathbf{r})$ sollen also der Differentialgleichung $\Delta\Psi_n(\mathbf{r}) = \lambda_n \Psi_n(\mathbf{r})$ in V genügen, wobei zusätzlich $\Psi_n(\partial V) = 0$ gelten soll. Mit der Normierung der Funktionen auf 1 $\left(\int_V \Psi_n^*(\mathbf{r})\Psi_n(\mathbf{r})dV = 1\right)$ erfüllt der so gefundene Satz an Eigenfunktionen automatisch die Vollständigkeitsrelation (so heißt einfach die folgende Eigenschaft):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n^*(\mathbf{r}')\Psi_n(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tag{1}$$

und die Orthogonalitätsbedingung (analog zu Basisvektoren im $\mathbb{R}^3$ bilden hier die Eigenfunktionen eine vollständige orthonormale Basis, das Skalarprodukt zwischen zwei Funktionen $F(\mathbf{r})$ und $G(\mathbf{r})$ ist definiert als $\int_V F^*(\mathbf{r})G(\mathbf{r})dV$):

$$\int_V \Psi_{n'}^*(\mathbf{r})\Psi_n(\mathbf{r})dV = \delta_{n,n'}. \tag{2}$$

Wegen der Vollständigkeit kann auch die Greensche Funktion $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ nach den Eigenfunktionen entwickelt werden: $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\mathbf{r}')\Psi_n(\mathbf{r})$. Zeigen Sie, dass $a_n(\mathbf{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0 \lambda_n}\Psi_n^*(\mathbf{r}')$ gilt.

(b) Finden Sie die Reihendarstellung der Greenschen Funktion für das Innere des Kastens $\{\mathbf{r} : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c\}$ mit den Kantenlängen a, b und c, der von perfekten metallischen Leitern begrenzt ist.

Abgabetermin: Freitag, 27. 11. 2015 um 9:45 Uhr.