

Übungsblatt # 6 zur Vorlesung Klassische Theoretische Physik III Lösungen zu den Übungen

Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theoretische Festkörperphysik

Dr. Giuseppe Toscano (giuseppe.toscano@kit.edu)

Prof. Dr. Carsten Rockstuhl (carsten.rockstuhl@kit.edu)

Übung 1 - Spiegelladungsmethode an metallischen Ebenen (4 Punkte)

- (a)(b) Die Punktladung q kann o. B. d. A. bei $\mathbf{r}_0 = (x, y, 0)$ angesiedelt werden. Eine Spiegelladung von q bei $(-x, -y, 0)$ und zwei Punktladungen $-q$ bei $(x, -y, 0)$ und $(-x, y, 0)$ führen zu einem Potential, welches bei $x = 0$ und bei $y = 0$ verschwindet. Also

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+x_0)^2 + (y+y_0)^2 + (z-z_0)^2}} \right) - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{(x+x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2 + (z-z_0)^2}} \right).$$

- (c) $\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \frac{\eta}{\epsilon_0}$. Auf der Metallplatte $x = 0$ ist dann:

$$\eta(0, y, z) = \epsilon \left(\frac{4x_0}{\sqrt[3]{x_0^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} - \frac{4x_0}{\sqrt[3]{x_0^2 + (y+y_0)^2 + (z-z_0)^2}} \right)$$

und auf der Metallplatte $y = 0$ gilt:

$$\eta(x, 0, z) = \epsilon \left(\frac{4y_0}{\sqrt[3]{(x-x_0)^2 + y_0^2 + (z-z_0)^2}} - \frac{4y_0}{\sqrt[3]{(x+x_0)^2 + y_0^2 + (z-z_0)^2}} \right).$$

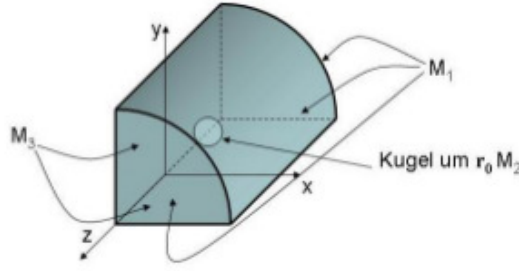
- (d) Gesamtladung auf den Platten. Bestimmung über den Satz von Gauß. Als Integrationsvolumen V dient der betrachtete Raum ohne eine kleine Kugel um die Punktladung bei $\mathbf{r}_0$. V ist also ladungsfrei.

$$\int_V \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) dV = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV = 0 = \int_{\partial V} \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) d\mathbf{A} = M.$$

Jetzt geht es an die Berechnung des Oberflächenintegrals $M = M_1 + M_2 + M_3$. Das Fernfeld (mit den Spiegelladungen) hat einen verschwindenden Monopolbeitrag und geht somit schneller als $\frac{1}{r^2}$ im Unendlichen gegen 0. Das Oberflächenintegral von $\mathbf{E}$ über den nicht durch Metall begrenzten Rand verschwindet also im Unendlichen, $M_1 = 0$. Das Oberflächenintegral über die Kugel (mit zum Kugelmittelpunkt gerichtetem $d\mathbf{A}$) liefert $M_2 = -q$. Wir erhalten also:

$$0 = M = M_1 + M_2 + M_3 = 0 - q + M_3.$$

Das Integral entlang der Metallplatten M_3 muß also $+q$ liefern. M_3 kann jetzt aber mit den Oberflächenladungen (siehe Übergangsbedingungen) identifiziert werden (Vorzeichen beachten!). Ergo: die induzierte Gesamtladung ist $-q$ (Vorzeichenwechsel weil jetzt innen und außen vertauscht wurden). Man kann natürlich auch die Integrale lösen ...



Übung 2 - Randwertproblem mit leitender Kugel (4 Punkte)

- (a) Das Potential einer Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ im leeren Raum ist

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') G_F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

Die Green Funktion für die Kugel mit Radius R ist

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{R}{r'} \frac{1}{|\mathbf{r} - (R/r')^2 \mathbf{r}'|} = \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} - \frac{R}{r} \frac{1}{|(R/r)^2 \mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

wobei im letzten Schritt die Symmetrie $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ benutzt wurde. Das Potential bei Anwesenheit der Kugel ist damit

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \phi_\rho(\mathbf{r}) - \frac{R}{r} \phi_\rho\left(\frac{R^2}{r^2} \mathbf{r}\right).$$

- (b) Das Potential des Dipoles ist bekanntermaßen

$$\phi_d(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{d} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{a})}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^3}. \quad (1)$$

Es gilt das Superpositionsprinzip; das erste Summand ist das Potential vom Dipol, der zweite muss also dann von der Kugel um den Ursprung herrühren. Um die induzierte Ladung zu bekommen, formt man sich das Potential am besten so um, dass es die Form der Multipolentwicklung hat (also nach Potenzen von $1/r$), denn dann kann man die vorhandene Ladung direkt ablesen als Koeffizient vor dem Term $1/r$ (Monopolterm). Die Entwicklung des Nenners in ϕ_k ist, wobei im zweiten Schritt $(1 + \varepsilon)^\alpha = 1 + \alpha\varepsilon + \dots$ benutzt wird,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|(R/r)^2 \mathbf{r} - \mathbf{a}|} &= \left[\frac{R^4}{r^2} + a^2 - 2 \frac{R^2}{r^2} \mathbf{r} \cdot \mathbf{a} \right]^{-3/2} \\ &= \frac{1}{a^3} \left[1 + 3 \left(\frac{R}{ra} \right)^2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{a} + \mathcal{O}(1/r^2) \right] \end{aligned}$$

und das Potential wird daher zu

$$\phi_k(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{R}{a^3} \mathbf{d} \cdot \mathbf{a} \frac{1}{r} + \left(-\frac{R^3}{a^5} \mathbf{d} + \frac{R^3}{a^5} (\mathbf{d} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{a} \right) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathcal{O}(1/r^5) \right]$$

und falls der Dipol nicht gerade zur Kugel hin zeigt, also falls $\mathbf{d} \cdot \mathbf{a} \neq 0$, ist die induzierte Ladung auf der Kugel nicht Null. Auf diese Art und Weise erhält man auch gleich noch den Dipolterm mit. Ist man nur am Monopolterm interessiert, so kann man auch rechnen

$$Q^{\text{ind}} = 4\pi\epsilon_0 \lim_{r \rightarrow \infty} r \phi_k(\mathbf{r})$$

was dasselbe Ergebnis liefert.

- (c) Bestehe der Dipol aus zwei Ladungen q an der Stelle $(a+l/2)\mathbf{e}_r$ und $-q$ an der Stelle $(a-l/2)\mathbf{e}_r$. Die Spiegelladung zu einer Ladung q bei $\mathbf{a}$ an einer Kugel mit Radius R ergibt sich aus $q' = -(R/a)q$. Damit ist die gesamte Spiegelladung für den Dipol (der Stärke $d = ql$)

$$Q^{\text{ind}} = q' = -\frac{R}{a+l/2}q - \frac{R}{a-l/2}(-q) = qR \left(\frac{l}{a^2 - (l/2)^2} \right) \stackrel{l \rightarrow 0}{=} \frac{Rd}{a^2}$$

was dem obigen Resultat entspricht.

Für den Fall einer Halbebene verschwindet die induzierte Ladung, denn die Spiegelladungen sind die ursprünglichen Ladungen mit vertauschtem Vorzeichen, es kommt keine Geometrie mit hinein. Für den Dipol ist das also Null. Aus dem Resultat für die Kugel kann man sich das im Limes $R \rightarrow \infty$ veranschaulichen, denn da der Dipol außerhalb der Kugel liegen soll muss dann auch $a \rightarrow \infty$ gehen und man bekommt

$$\lim_{a > R \rightarrow \infty} Q^{\text{ind}} = \lim_{a > R \rightarrow \infty} \frac{Rd}{a^2} = 0.$$

- (d) Wie gerade gesehen ist der führende Term im Potential $Q^{\text{ind}}/4\pi\epsilon_0 r$ und höhere Terme sind von $\mathcal{O}(R^3/a^3)$. Die Kraft zwischen Dipol und Kugel ist wechselseitig, die auf den Dipol wirkende ist in führender Ordnung

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= Q^{\text{ind}} \mathbf{E}_d = -\frac{Q^{\text{ind}}}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\mathbf{d} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{a})(\mathbf{r} - \mathbf{a}) - (\mathbf{r} - \mathbf{a})^2 \mathbf{d}}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^5} \Big|_{r=0} \\ &= -\frac{Q^{\text{ind}}}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\mathbf{d} \cdot \mathbf{a})\mathbf{a} - a^2 \mathbf{d}}{a^5} \\ &= -\frac{Q^{\text{ind}}}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\mathbf{d} \cdot \mathbf{n}_a)\mathbf{n}_a - \mathbf{d}}{a^3} \quad \text{mit } \mathbf{n}_a = \mathbf{a}/a \\ &= -\frac{Rd \cdot \mathbf{n}_a}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\mathbf{d} \cdot \mathbf{n}_a)\mathbf{n}_a - \mathbf{d}}{a^5} \end{aligned}$$

sie geht also für $a \gg R$ mit der fünften Potenz des inversen Abstandes. Im Vgl., die Kraft zwischen einer Punktladung und einer leitenden Kugel geht nur zur dritten Potenz.

Übung 3 - Greensche Funktion als Reihe (4 Punkte)

- (a) Gegeben:

$$\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\mathbf{r}') \Psi_n(\mathbf{r})$$

Also:

$$\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\mathbf{r}') \Delta \Psi_n(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\mathbf{r}') \lambda_n \Psi_n(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Entweder direkter Vergleich mit der Vollständigkeitsrelation. Oder besser, da man nicht die Koeffizienten einer unendlichen Summe vergleichen muss, Nutzen der Orthogonalitätsrelation. Also Skalarprodukt mit $\Psi_{n'}^*(\mathbf{r})$:

$$\int_V \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\mathbf{r}') \lambda_n \Psi_{n'}^*(\mathbf{r}) \Psi_n(\mathbf{r}) dV = a_{n'}(\mathbf{r}') \lambda_{n'} = - \int_V \Psi_{n'}^*(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') / \epsilon_0 dV = -\Psi_{n'}^*(\mathbf{r}') / \epsilon_0$$

Umbenennen von n' nach n ergibt schließlich:

$$a_n(\mathbf{r}') = -\frac{\Psi_n^*(\mathbf{r}')}{\epsilon_0 \lambda_n}.$$

- (b) Mit dem Separationsansatz $\Psi_n(\mathbf{r}) = X_{nx}(x)Y_{ny}(y)Z_{nz}(z)$ rein in $\Delta \Psi_n(\mathbf{r}) = \lambda_n \Psi_n(\mathbf{r})$ liefert

$$\frac{X_{nx}''(x)}{X_{nx}(x)} = -\lambda_{nx}^2 \quad \frac{Y_{ny}''(y)}{Y_{ny}(y)} = -\lambda_{ny}^2 \quad \frac{Z_{nz}''(z)}{Z_{nz}(z)} = -\lambda_{nz}^2$$

mit $\lambda_{nx}^2 + \lambda_{ny}^2 + \lambda_{nz}^2 = -\lambda_n^2$. Die Lösungen davon sind Exponentialfunktionen, wobei nur Sinusfunktionen auf dem Rand verschwinden:

$$X_{nx}(x) = A_{nx} \sin(\lambda_{nx}x)$$

$$Y_{ny}(y) = A_{ny} \sin(\lambda_{ny}y)$$

$$Z_{nz}(z) = A_{nz} \sin(\lambda_{nz}z)$$

Allerdings sind für λ_{nx} nur die Werte $\lambda_{nx} = \frac{k\pi}{a}$ mit $k \in \mathbb{N}$ zugelassen. Analog gilt dann noch $\lambda_{ny} = \frac{l\pi}{b}$ und $\lambda_{nz} = \frac{m\pi}{c}$. Noch fix normieren: Wegen Separation kann Normierung getrennt erfolgen, so z. B. für x:

$$\int_0^a X_{nx}^2(x) dx = \int_0^a A_{nx}^2 \sin^2(\lambda_{nx}x) dx = \frac{a}{2} A_{nx}^2 = 1$$

Also $A_{nx} = \sqrt{\frac{2}{a}}$. Alles zusammen ergibt dann:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{k,l,m=1}^{\infty} \frac{8\pi^2}{\varepsilon_0 abc} \frac{\sin\left(\frac{k\pi x'}{a}\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{l\pi y'}{b}\right) \sin\left(\frac{l\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{m\pi z'}{c}\right) \sin\left(\frac{m\pi z}{c}\right)}{\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} + \frac{m^2}{c^2}}.$$