

Übungsblatt # 7 zur Vorlesung Klassische Theoretische Physik III Lösungen zu den Übungen

Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Festkörperphysik

Dr. Giuseppe Toscano (giuseppe.toscano@kit.edu)

Prof. Dr. Carsten Rockstuhl (carsten.rockstuhl@kit.edu)

Übung 1 - Halbkugelförmiger Hohlraum (4 Punkte)

Außerhalb des Hohlraumes ist das Potential identisch $\varphi = V$, wir brauchen nur noch φ innerhalb zu bestimmen. Die z -Achse legen wir so, dass sie von der die Halbkugel nach unten begrenzenden Ebene senkrecht nach oben zeigt.

Die Greenfunktion für innerhalb der Kugel mit Radius R ist entsprechend Skript

$$G_{\text{Kugel}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{R}{r'} \frac{1}{|\mathbf{r} - (R/r')^2 \mathbf{r}'|} \right\} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} - \frac{R}{r} \frac{1}{|(R/r)^2 \mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\}$$

wobei wieder deren Symmetrie benutzt wurde. Jetzt muss noch an der Ebene gespiegelt werden, was die Ladungen und die z -Komponente mit einem Vorzeichen versieht. Damit ist die gesamte Greenfunktion

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_{\text{Kugel}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}' \equiv (x', y', z')) - G_{\text{Kugel}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}' \equiv (x', y', -z'))$$

und das Potential bekommt man durch Integration über die Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r}')$ des Dipoles $\mathbf{d}$. Dafür gibt es zwei Ansätze.

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int dV' \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + V = \int dV' \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \epsilon_0 \int_{\partial V} \varphi(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} d\mathbf{A}'$$

Die erste Zeile ist einfach das Integral über die Greensche Funktion gewichtet mit den Raumladungen, was ein auf dem Rand verschwindendes Potential erzeugen würde. Dieses wird nun einfach um V erhöht, so dass auf dem Rand dann V vorliegt. Die zweite Zeile entspricht dem vollen Formalismus mit den Greenschen Funktionen. Das Oberflächenintegral lässt sich allerdings noch weiter umformen:

$$\begin{aligned} -\epsilon_0 \int_{\partial V} \varphi(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} d\mathbf{A}' &= -V\epsilon_0 \int_{\partial V} \varphi(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} d\mathbf{A}' \\ &= -V\epsilon_0 \int_V \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' \\ &= -V\epsilon_0 \int_V -\frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\epsilon_0} dV' \\ &= V. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \int_V dV' \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + V \\ &= \varphi_d(\mathbf{r}) - \frac{R}{r} \varphi_d \left(\frac{R^2}{r^2} \mathbf{r} \right) - \varphi_{d'}(\mathbf{r}) + \frac{R}{r} \varphi_{d'} \left(\frac{R^2}{r^2} \mathbf{r} \right) + V \end{aligned}$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\mathbf{d} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{a})}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^3} - \frac{R}{r} \frac{\mathbf{d} \cdot ((R/r)^2 \mathbf{r} - \mathbf{a})}{|(R/r)^2 \mathbf{r} - \mathbf{a}|^3} \right) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\mathbf{d}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{a}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}'|^3} - \frac{R}{r} \frac{\mathbf{d}' \cdot ((R/r)^2 \mathbf{r} - \mathbf{a}')}{|(R/r)^2 \mathbf{r} - \mathbf{a}'|^3} \right) + V$$

wobei $\mathbf{d}' = (d_x, d_y, -d_z)$ der ‘Spiegeldipol’ zu $\mathbf{d} = (d_x, d_y, d_z)$ bzgl. der Ebene ist und bei $\mathbf{a}' = (a_x, a_y, -a_z)$ sitzt.

Übung 2 - Dielektrische Kugel im Dielektrikum mit äußerem Feld (3+1+1+1=6 Punkte)

(a) In Kugelkoordinaten. Der Ansatz für innen und außen lautet:

$$\Phi_{i,a}(\rho, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_{li,a} \rho^l + B_{li,a} \rho^{-(l+1)} \right) P_l(\theta)$$

Regularität bei $\rho = 0$ lässt 1 ρ -Terme verschwinden:

$$\Phi_i(\rho, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_{li} \rho^l P_l(\theta)$$

Fernfeld, also $\Phi_a(\rho \rightarrow \infty, \theta) = -E_z z = -E_z \rho \cos(\theta) = -E_z \rho P_1(\theta)$.

$$\Phi_a(\rho, \theta) = -E_z \rho P_1(\theta) + \sum_{l=0}^{\infty} B_{la} \rho^{-(l+1)} P_l(\theta)$$

Stetigkeit von Φ bei $\rho = R$, also $\Phi_i(R, \theta) = \Phi_a(R, \theta)$

$$A_{li} = B_{la} R^{-(2l+1)} \quad l \neq 1 \quad (1)$$

$$A_{1i} = -E_z + B_{1a} R^{-3} \quad (2)$$

Normalenableitung von $\mathbf{D}$ stetig, also $\epsilon_2 \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial \rho} \right)_{\rho=R} = \epsilon_1 \left(\frac{\partial \Phi_a}{\partial \rho} \right)_{\rho=R}$

$$\epsilon_2 \left(\sum_{l=0}^{\infty} l A_{li} R^{l-1} P_l(\theta) \right) = \epsilon_1 \left(-E_z P_1(\theta) - \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) B_{la} R^{-(l+2)} P_l(\theta) \right)$$

Für $l = 0$ verschwindet die linke Seite, also

$$B_{0a} = 0. \quad (3)$$

Es verbleiben die restlichen Terme:

$$\epsilon_2 A_{1i} = -\epsilon_1 E_z - 2\epsilon_1 B_{1a} R^{-3} \quad l = 1 \quad (4)$$

$$\epsilon_2 (l A_{li} R^{l-1}) = -\epsilon_1 \left((l+1) B_{la} R^{-(l+2)} \right) \quad l \geq 2 \quad (5)$$

(3) und (1) liefern

$$A_{0i} = 0 \quad B_{0a} = 0$$

(4) und (2) liefern

$$A_{1i} = \frac{-3\epsilon_1 E_z}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} \quad B_{1a} = R^3 E_z \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2\epsilon_1 + \epsilon_2}$$

(5) und (1) liefern

$$\begin{aligned} \epsilon_2 (l A_{li} R^{l-1}) &= -\epsilon_1 \left((l+1) B_{la} R^{-(l+2)} \right), \quad l \geq 2 \quad A_{li} = B_{la} R^{-(2l+1)} \\ \epsilon_2 (l B_{la} R^{-(2l+1)} R^{l-1}) &= -\epsilon_1 \left((l+1) B_{la} R^{-(l+2)} \right) \\ \epsilon_2 (l B_{la} R^{-(l+2)}) &= -\epsilon_1 \left((l+1) B_{la} R^{-(l+2)} \right) \\ \epsilon_2 (l B_{la}) &= \epsilon_1 ((l+1) B_{la}) \\ \epsilon_2 l B_{la} + \epsilon_1 (l+1) B_{la} &= 0 \\ B_{la} (\epsilon_2 l + \epsilon_1 (l+1)) &= 0 \\ B_{la} = 0 &= A_{li} \quad l \geq 2. \end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned}\Phi_i(\rho, \theta) &= A_{1i}\rho P_1(\theta) = \frac{-3\varepsilon_1 E_z}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \rho P_1(\theta) = \frac{-3\varepsilon_1 E_z}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \rho \cos(\theta) = \frac{-3\varepsilon_1 E_z}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} z \\ &= \frac{-3\varepsilon_1 \mathbf{E}_z \cdot \mathbf{r}}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\end{aligned}$$

$$\Phi_a(\rho, \theta) = -E_z \rho P_1(\theta) + B_{1i,a} \rho^{-(l+1)} P_1(\theta) = -E_z z + R^3 E_z \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \rho^{-2} \cos(\theta) \quad (6)$$

$$= -E_z z + R^3 E_z \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{z}{\rho^3} = -\mathbf{E}_z \cdot \mathbf{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{\rho^3} \quad (7)$$

mit $\mathbf{E}_z = E_z \mathbf{e}_z$ und dem Kürzel $\mathbf{p} = 4\pi\varepsilon_0 R^3 \mathbf{E}_z \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$.

(b) Das Feld auszurechnen geht nunmehr ganz einfach (siehe Potential eines Dipols):

$$\begin{aligned}E_i(\mathbf{r}) &= \frac{3\varepsilon_1 \mathbf{E}_z}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \\ E_a(\mathbf{r}) &= \mathbf{E}_z + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})\mathbf{r}}{\rho^5} - \frac{\mathbf{p}}{\rho^3} \right]\end{aligned}$$

(c) Polarisation $\mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E} = (\varepsilon_2 - 1)\varepsilon_0 E_i(\mathbf{r})$

$$\mathbf{P} = \frac{3\varepsilon_1(\varepsilon_2 - 1)\varepsilon_0 \mathbf{E}_z}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$

(d) Gesamtdipol: Das Potential eines Dipols im Koordinatenursprung im Dielektrikum ε_1 sollte von der Form $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{\rho^3}$ sein. Vergleich mit obigem Dipolpotential (6) liefert das Dipolmoment der Kugel:

$$\mathbf{p}_K = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 R^3 \mathbf{E}_z \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$

Alternativ kann man auch das Kugelvolumen mit $\mathbf{E}_i$ multiplizieren

$$\frac{4\pi R^3}{3} \mathbf{E}_i = \frac{4\pi\varepsilon_0 R^3 \mathbf{E}_z \varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$

Durch die Kugel bringt man polarisierbare Materie in das Dielektrikum ε_1 , welche zu einem zusätzlichen Dipolbeitrag

$$\mathbf{p}_K = \frac{4\pi\varepsilon_0 R^3 \mathbf{E}_z \varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$$

führt, welcher mit dem Dipolbeitrag der Kugel identifiziert wird.

Übung 3 - Kugelkondensator (2+1+1=4 Punkte)

(a) Ohne das Dielektrikum wäre das elektrische Feld zwischen den beiden Kugeln radial. Man kann nicht annehmen, dass sich das durch das Dielektrikum nicht ändert. Jedoch ist das elektrische Feld mit Sicherheit tangential zur Fläche zwischen den Regionen mit und ohne Dielektrikum. Somit ist die Bedingung $E_1^{\parallel} = E_2^{\parallel}$ automatisch erfüllt. Da es keine Komponente senkrecht zur Grenzfläche gibt, ist die Bedingung $D_1^{\perp} = D_2^{\perp}$ automatisch erfüllt. Somit können wir einen Ansatz der folgenden Form wählen.

$$\mathbf{E} = c \frac{\mathbf{e}_r}{r^2}$$

Wir benutzen den Gauss'schen Satz verwenden, um die Konstante c zu bestimmen.

$$\int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = Q \quad \rightarrow \quad \frac{\varepsilon_0 c}{r^2} (2\pi r^2) + \frac{\varepsilon c}{r^2} (2\pi r^2) = Q$$

Somit erhalten wir

$$c = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon + \varepsilon_0)}$$

- (b) Die Oberflächenladungsdichte ist gegeben durch $\sigma = D^\perp|_{r=a}$ wobei $D^\perp = \varepsilon_0 E^\perp$ oder $D^\perp = \varepsilon E^\perp$ gilt, abhängig von der Region. Somit erhalten wir

$$\sigma = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \varepsilon_0} \frac{Q}{2\pi a^2}; & \text{dielektrische Hälfte} \\ \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} \frac{Q}{2\pi a^2}; & \text{leere Hälfte} \end{cases}$$

- (c) Die Polarisationsladungsdichte ist gegeben durch

$$\rho_{geb} = -\nabla P$$

Ausserhalb des Dielektrikums ist die Polarisation natürlich null. Mit dem Gauss'schen Satz erhalten wir

$$\sigma_{geb} = -P^\perp|_{r=a} = -\chi_e E^\perp|_{r=a} = -\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} \frac{Q}{2\pi a^2}$$

.