

Übungsblatt # 9 zur Vorlesung Klassische Theoretische Physik III Lösungen zu den Übungen

Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theoretische Festkörperphysik

Dr. Giuseppe Toscano (giuseppe.toscano@kit.edu)

Prof. Dr. Carsten Rockstuhl (carsten.rockstuhl@kit.edu)

Übung 1 - Biot-Savart Gesetz (3 Punkte)

Biot-Savart Gesetz

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_L \frac{d\mathbf{s} \times (\mathbf{r} - \mathbf{s})}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3}$$

Da P im Ursprung liegt, ist $\mathbf{r} - \mathbf{s}$ der Vektor vom Linienelement $d\mathbf{s}$ zum Ursprung. Teile den Draht in 3 Stücke: zwei gerade und ein (halb-)kreisförmiges Stück. Wegen des Superpositionsprinzips gilt

$$\mathbf{B}(P) = \mathbf{B}_{ge1}(P) + \mathbf{B}_{kr}(P) + \mathbf{B}_{ge2}(P)$$

somit der untere gerade Teil:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{ge1}(P) &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_L \frac{d\mathbf{s} \times (\mathbf{r} - \mathbf{s})}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3} \quad \curvearrowright (\mathbf{r} - \mathbf{s} = x\mathbf{e}_x + R\mathbf{e}_y, d\mathbf{s} = dx\mathbf{e}_x) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\infty}^0 dx \frac{\mathbf{e}_x \times (x\mathbf{e}_x + R\mathbf{e}_y)}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \curvearrowright (\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_x = 0, \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\infty}^0 dx \frac{R\mathbf{e}_z}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0}{4\pi} IR \left[\frac{x}{R^2 \sqrt{x^2 + R^2}} \right]_{-\infty}^0 \mathbf{e}_z = \frac{\mu_0}{4\pi} IR \left[0 + \frac{1}{R^2} \right] \mathbf{e}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

und der obere gerade Teil:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{ge2}(P) &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_L \frac{d\mathbf{s} \times (\mathbf{r} - \mathbf{s})}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3} \quad \curvearrowright (\mathbf{r} - \mathbf{s} = x\mathbf{e}_x - R\mathbf{e}_y, d\mathbf{s} = -dx\mathbf{e}_x) \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^{\infty} dx \frac{\mathbf{e}_x \times (x\mathbf{e}_x - R\mathbf{e}_y)}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \curvearrowright (\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_x = 0, \mathbf{e}_x \times -\mathbf{e}_y = -\mathbf{e}_z) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^{\infty} dx \frac{R\mathbf{e}_z}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0}{4\pi} IR \left[\frac{x}{R^2 \sqrt{x^2 + R^2}} \right]_0^{\infty} \mathbf{e}_z = \frac{\mu_0}{4\pi} IR \left[\frac{1}{R^2} - 0 \right] \mathbf{e}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

und schließlich in Zylinderkoordinaten der (halb-)kreisförmige Teil:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{kr}(P) &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_L \frac{d\mathbf{s} \times (\mathbf{r} - \mathbf{s})}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3} \quad \curvearrowright (\mathbf{r} - \mathbf{s} = -R\mathbf{e}_r, d\mathbf{s} = d\varphi R\mathbf{e}_\varphi) \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi R\mathbf{e}_\varphi \times R\mathbf{e}_r}{R^3} \quad \curvearrowright (\mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_r = \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y) \\ &\downarrow \mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_r = \cos^2 \varphi (\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_x) + \sin^2 \varphi (-\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y) = -\cos^2 \varphi \mathbf{e}_z - \sin^2 \varphi \mathbf{e}_z = -\mathbf{e}_z \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \frac{R^2 \mathbf{e}_z}{R^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \mathbf{e}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right] \mathbf{e}_z = \frac{\mu_0 I}{4R} \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

und zusammen

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(P) &= \mathbf{B}_{ge1}(P) + \mathbf{B}_{kr}(P) + \mathbf{B}_{ge2}(P) \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \mathbf{e}_z + \frac{\mu_0 I}{4R} \mathbf{e}_z = \frac{\mu_0 I}{4R} \mathbf{e}_z \left(\frac{2}{\pi} + 1 \right)\end{aligned}$$

Übung 2 - Zylinderspule (5 Punkte)

Die Zylindersymmetrie impliziert $\mathbf{A} = A(r, z) \mathbf{e}_\varphi$. Wegen der Translationssymmetrie in z -Richtung wird das zu $\mathbf{A} = A(r) \mathbf{e}_\varphi$. Die allgemeine Lösung der Poisson-Gleichung der Magnetostatik kann für eine einzelne kartesische Komponente angesetzt werden:

$$A_y = A(r) \cos \varphi = \int dr' \frac{j(r') \cos \varphi'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Wegen der Symmetrien genügt es, diese Gleichung für $\mathbf{r} := (x, y, z) = (r, 0, 0)$ auszuwerten. Zusammen mit $\mathbf{r}' := (x', y', z') = (R \cos \varphi', R \sin \varphi', 0)$ ergibt sich der Abstand $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$ und damit

$$\begin{aligned}A(r) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^\infty dr' r' \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-L/2}^{L/2} dz' \frac{j(r') \cos \varphi'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \varphi + z'^2}} \\ &= \frac{NIR\mu_0}{4\pi L} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-L/2}^{L/2} dz' \frac{\cos \varphi'}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \varphi + z'^2}} \\ &= \frac{NIR\mu_0}{4\pi L} \int_0^{2\pi} d\varphi' \cos \varphi' [\ln(L^2) - \ln(r^2 + R^2 - 2rR \cos \varphi')]\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde für die unendliche lange Spule der Grenzwert

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz'}{\sqrt{b^2 + z'^2}} = \lim_{L \rightarrow \infty} \ln \left[\frac{\sqrt{L^2/4 + b^2} + L/2}{\sqrt{L^2/4 + b^2} - L/2} \right] = \ln \frac{L^2}{b^2}$$

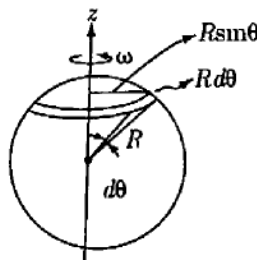
mit $b = r^2 + R^2 - 2rR \cos \varphi'$. Der Term $\ln(L^2)$ ist koordinatenunabhängig und wird als Konstante weggelassen. Der verbleibende Term wird partiell integriert:

$$\begin{aligned}A(r) &= -\frac{NIR\mu_0}{4\pi L} \int_0^{2\pi} d\varphi \cos \varphi \ln(r^2 + R^2 - 2rR \cos \varphi) \\ &= \frac{NIR^2\mu_0}{2\pi L} r \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\sin^2 \varphi}{r^2 + R^2 - 2rR \cos \varphi} \\ &= \frac{NIr\mu_0}{4\pi L} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1 - \cos 2\varphi}{1 - 2r/R \cos \varphi + r^2/R^2} = \frac{NI\mu_0}{2L} \begin{cases} r & \text{für } r \leq R \\ \frac{R^2}{r} & \text{für } r > R \end{cases}\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde das in der Aufgabenstellung angegebene Integral J verwendet.

Übung 3 - Magnetisches Dipolmoment einer geladenen, rotierenden Kugelschale (3 Punkte)

Die Kugelschale wurde in Ringe unterteilt. Die Ladung eines Ringes ist



$$dq = \sigma(2\pi R \sin(\theta)) R d\theta$$

Die Umdrehungsdauer beläuft sich auf $dt = 2\pi/\omega$. Somit fließt ein Strom

$$dI = \frac{dq}{dt} = \sigma\omega R^2 \sin(\theta)d\theta.$$

Die vom Strom umschlossene Fläche ist $\pi(R \sin(\theta))^2$, das Dipolmoment beträgt

$$d\mathbf{m} = dI \times \mathbf{F} = \pi(R \sin(\theta))^2 \sigma\omega R^2 \sin(\theta)d\theta \mathbf{e}_z.$$

Für das totale Dipolmoment gilt

$$\mathbf{m} = \sigma\omega\pi R^4 \int_0^\pi \sin^3(\theta)d\theta \mathbf{e}_z = \frac{4}{3}\sigma\omega\pi R^4 \mathbf{e}_z$$