

Übungsblatt # 10 zur Vorlesung Klassische Theoretische Physik III Lösungen zu den Übungen

Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Festkörperphysik

Dr. Giuseppe Toscano (giuseppe.toscano@kit.edu)

Prof. Dr. Carsten Rockstuhl (carsten.rockstuhl@kit.edu)

Übung 1 - Helmholtz–Spulenpaar (3 Punkte)

Das Induktionsfeld der Leiterschleifen erhält man mittels Biot-Savart Gesetz

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i I_i \int_L \frac{d\mathbf{s}_i \times (\mathbf{r} - \mathbf{s}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}_i|^3}. \quad (1)$$

Man verwendet natürlich Zylinderkoordinaten und erhält

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_1 &= \frac{a}{2} \mathbf{e}_z + R \mathbf{e}_r \\ \mathbf{s}_2 &= -\frac{a}{2} \mathbf{e}_z + R \mathbf{e}_r \\ r &= z \mathbf{e}_z \\ d\mathbf{s}_i &= R d\varphi_i \mathbf{e}_\varphi \end{aligned}$$

daraus folgt dann

$$\begin{aligned} d\mathbf{s}_1 \times (\mathbf{r} - \mathbf{s}_1) &= R d\varphi_1 \mathbf{e}_\varphi \times \left(z \mathbf{e}_z - \frac{a}{2} \mathbf{e}_z - R \mathbf{e}_r \right) \\ &= R^2 d\varphi_1 \mathbf{e}_z + R d\varphi_1 \left(z - \frac{a}{2} \right) \mathbf{e}_r \\ d\mathbf{s}_2 \times (\mathbf{r} - \mathbf{s}_2) &= R d\varphi_2 \mathbf{e}_z + R d\varphi_2 \left(z + \frac{a}{2} \right) \mathbf{e}_r. \end{aligned}$$

Daraus folgt für die z -Komponente des B-Feldes nach einsetzen in Gln. 1

$$\begin{aligned} B_z(z) &= \frac{\mu_0 R^2 I}{4\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_1}{\left[R^2 + \left(z - \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} + \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_2}{\left[R^2 + \left(z + \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\} \\ &= \frac{\mu_0 I R^2}{2} \left\{ \left[R^2 + \left(z - \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} + \left[R^2 + \left(z + \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \right\}. \end{aligned}$$

Jetzt bleibt nur noch zu klären für welches Verhältnis R/a die z -Komponente im Ursprung maximal homogen wird. Dazu einfach den Ausdruck für das B-Feld in eine Taylor-Reihe um $z = 0$ entwickeln

$$B_z(z) \sim \frac{\mu_0 I R^2}{\left(R^2 + \frac{a^2}{4} \right)^{3/2}} \left\{ 1 + \frac{1}{2 \left(R^2 + \frac{a^2}{4} \right)} \left[-3 + \frac{15a^2}{4 \left(R^2 + \frac{a^2}{4} \right)} \right] z^2 + \mathcal{O}(z^4) \right\}$$

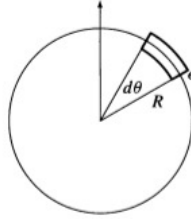
$B_z(z)$ ist maximal homogen, wenn der Term proportional zu z^2 verschwindet, wenn also

$$-12 \left(R^2 + \frac{a^2}{4} \right) + 15a^2 = 0 \implies R = a$$

Ist der Abstand der Spulen genauso groß wie der Spulenradius, so ist das B-Feld in der Umgebung des Ursprungs maximal homogen.

Übung 2 - Oberflächenströme der homogen magnetisierten Kugel (5 Punkte)

Wir betrachten ein kleines Volumenelement an der Kugeloberfläche, das von den Flächenelementen $d\mathbf{A} = (R + \epsilon)^2 \sin \theta d\theta d\phi \mathbf{e}_r$ und $-(R - \epsilon)^2 \sin \theta d\theta d\phi \mathbf{e}_r$ begrenzt ist (mit $\epsilon \rightarrow 0$). Aus $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (gilt überall, auch bei $r \approx R$) folgt $\oint_a d\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$. Hieraus ergibt sich sofort $B_r(R + \epsilon) - B_r(R - \epsilon) = 0$.



Das skizzierte viereckige Element sei nun ein kleines Flächenelement. Seine Kontur C besteht (abgesehen von infinitesimalen Zwischenstücken) aus den Weegelementen $d\mathbf{r} = (R + \epsilon)d\theta \mathbf{e}_\theta$ und $-(R - \epsilon)d\theta \mathbf{e}_\theta$. Hierauf wenden wir das Ampere-Gesetz an:

$$(B_\theta(R + \epsilon) - B_\theta(R - \epsilon)) R d\theta = \mu_0 \frac{I(\theta)}{\pi R} \int_{R-\epsilon}^{R+\epsilon} dr r d\theta \delta(r - R) = \frac{\mu_0 I(\theta)}{\pi} d\theta.$$

Hieraus folgt die zweite Bedingung. Die sphärischen Komponenten des gegebenen Magnetfelds sind:

$$B_r = B_0 \cos \theta, \quad B_\theta = -B_0 \sin \theta, \quad B_\phi = 0 \quad (r \leq R),$$

$$B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m \cos \theta}{r^3}, \quad B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^3}, \quad B_\phi = 0 \quad (r > R).$$

Wenn wir dies in $B_r(R + \epsilon) - B_r(R - \epsilon) = 0$ und $B_\theta(R + \epsilon) - B_\theta(R - \epsilon) = \frac{\mu_0 I(\theta)}{\pi R}$ einsetzen, erhalten wir das magnetische Moment und den Oberflächenstrom:

$$m = \frac{2\pi}{\mu_0} B_0 R^3, \quad I(\theta) = \left(\frac{m}{R^2} + B_0 \frac{4\pi}{\mu_0} R \right) \sin \theta = \frac{3m}{R^2} \sin \theta$$

Übung 3 - Kraft und Drehmoment zwischen zwei kreisförmigen Leitern (3 Punkte)

In großem Abstand $L \gg R$ gilt für das Induktionsfeld einer kleinen Leiterschleife mit Radius R :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{r})}{r^5} - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m}_1}{r^3} \quad (r = L)$$

mit

$$\mathbf{m}_1 = I\pi R^2 \mathbf{n} \quad \mathbf{m}_2 = I\pi R^2 \mathbf{n}$$

wobei $\mathbf{n}$ ein Einheitsvektor ist. Das Koordinatensystem soll so gewählt sein, dass die Dipole in der (x, y) Ebene liegen und, $\mathbf{n} = \mathbf{e}_x$. Die Energie zweier magnetischer Dipole ist

$$U = -\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^5} + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2}{r^2} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m^2}{r^3} (3 \cos^2(\theta) - 1)$$

Die Kraft kann daraus wie folgt bestimmt werden

$$\mathbf{F} = -\nabla U = \left[\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] (\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[-\mathbf{e}_r \frac{3m^2}{r^4} (3 \cos^2(\theta) - 1) - 6 \frac{m^2}{r^4} \cos(\theta) \sin(\theta) \mathbf{e}_\theta \right]$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3m^2}{L^4} [(1 - 3 \cos^2(\theta)) \mathbf{e}_r - \sin(2\theta) \mathbf{e}_\theta]$$

Dabei wurde verwendet $\mathbf{m}_1 = \mathbf{m}_2 = \mathbf{m}$. Das Drehmoment lautet:

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} m^2 [\mathbf{e}_x \times \mathbf{r}] \frac{3 \cos(\theta)}{r^4} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3m^2 \cos(\theta)}{L^3} \mathbf{e}_z$$